



Editora
Bernoulli



MATEMÁTICA

Volume 05





MATEMÁTICA Volume 05

Frente A

09 3 Combinações I Autor:
Luiz Paulo

10 7 Combinações II
Autor: Luiz Paulo

Frente B

09 11 Cilindros Autor:
Paulo Vinícius Ribeiro

10 19 Cones Autor: Paulo
Vinícius Ribeiro

Frente C

09 27 Função exponencial
Autor: Luiz Paulo

10 33 Equações e
inequações exponenciais
Autor: Luiz Paulo

Frente D

09 37 Áreas de polígonos

Autor: Paulo Vinícius

Ribeiro

10 45 Áreas de círculo e

suas partes Autor: Paulo

Vinícius Ribeiro

Frente E

Sumário - Matemática 17 51

Polinômios I Autor: Luiz Paulo **18 55**

Polinômios II Autor: Luiz Paulo **19 59**

Equações polinomiais I Autor: Luiz Paulo

20 63 Equações

polinomiais II Autor: Luiz
Paulo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Combinações I 09 A

INTRODUÇÃO Assim, temos: $A_{n,p}, n! C = n, p = \Rightarrow p! (n - p)!$ Nos estudos anteriores, vimos os agrupamentos que diferem entre si pela ordem ou pela natureza dos seus



elementos. Neste módulo, estudaremos agrupamentos que $C = , n \geq p, p (n!$

$$n - p)!. ! p$$

diferem entre si somente pela natureza dos seus elementos.

Tais agrupamentos são conhecidos como combinações

OBSERVA

simples.

As combinações simples de n elementos tomados p a p ,

Como exemplo, consideremos o seguinte problema:

em que $n \geq p$, podem ser representadas também nas

3 pessoas a partir de um grupo de 6 pessoas? De quantos modos podemos formar uma comissão de $\binom{6}{p}$ C ou $n_n || p || . \binom{6}{p}$

Seja {Antônio, Pedro, João, Thiago, Nelson, Patrícia} **Exemplos**

o grupo de 6 pessoas. Nota-se que as comissões

1º) De quantos modos é possível formar uma comissão

{Antônio, Pedro, João} e {João, Antônio, Pedro} são de 4 alunos a partir de um grupo de 7 alunos? idênticas, pois a mudança de ordem dos nomes não

Resolução

determina uma nova comissão. Já as comissões {João, Thiago, Patrícia} e {Nelson, Patrícia, Antônio} são diferentes, Trata-se de um problema de combinações simples de

7 elementos, tomados 4 a 4. Temos, portanto: pois seus integrantes são diferentes.

Cada uma das comissões de três elementos gera 3! $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = 35$ modos

3! 4! 3! 4! 3! 4! 3! 4!

sequências, obtidas pela mudança da ordem dos seus

2º) Quantos triângulos podem ser construídos a partir elementos (permutações simples). Porém, como vimos dos vértices de um hexágono convexo?

anteriormente, cada uma dessas sequências se refere à mesma comissão. Ao calcularmos o total de grupos, **Resolução:** considerando que a ordem é importante, temos A grupos. Sejam A, B, C, D, E e F os vértices do hexágono. _{6,3}

A seguir, “descontamos” as permutações dos três. Observe que os triângulos ABC e CBA são idênticos, elementos, dividindo o resultado obtido por 3!. ou seja, a ordem dos vértices não é importante.

Trata-se, portanto, de um problema de combinações. As comissões obtidas são chamadas combinações simples, e são representadas por $C_{6,3} = 6 \text{ simples}$. Assim, temos:

Assim, temos $C_{6,3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$ comissões. _{6,3} 3 !
3º) $C_{6,3} = 20$ triângulos _{6,3} ! Uma escola possui 7 professores de Matemática,

5 professores de Português e 4 professores de

COMBINAÇÕES SIMPLES Geografia. De quantos modos é possível formar uma comissão de 5 professores contendo 2 professores de

Definição Matemática, 2 professores de Português e 1 professor

de Geografia?

Considere um conjunto com n elementos. Chamamos **Resolução:**

de combinações simples de n elementos, tomados p a p , Devemos escolher 2 entre 7 professores de Matemática

os agrupamentos com p elementos de um conjunto A (C), 2 entre 5 professores de Português (C) e ${}_{7,2,5,2}$

nos quais a ordem dos elementos não é importante. 1 entre 4 professores de Geografia (C). Portanto, ${}_{4,1}$

pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

Os agrupamentos diferem entre si somente pela natureza

dos seus elementos. $C \cdot C \cdot C = {}_{2,5}C \cdot {}_{2,4}C \cdot {}_1C = 21 \cdot 10 \cdot 4 = 840$ modos ${}_{7,2,5,2}$

Editora Bernoulli 3

Frente A Módulo 09

4º) No início de uma festa, foram trocados 66 apertos **04.** (UFJF-MG) Uma liga esportiva elaborou um campeonato

de mão. Sabendo que cada pessoa cumprimentou de futebol que será disputado em dois turnos. Em cada

uma única vez todas as outras, quantas pessoas turno, cada clube jogará exatamente uma partida contra

havia na festa? cada um dos outros participantes. Sabendo que o total de

Resolução: partidas será de 306, o número de clubes que participarão

do campeonato é igual a

Seja n o número de pessoas na festa. Cada aperto

A) 34 D) 12

de mão equivale a um grupo de 2 pessoas. Portanto,

B) 18 E) 9

o total de apertos de mão é igual ao total de grupos

C)
17

de 2 pessoas obtidos a partir das n pessoas da festa,

ou seja, $C_{n, 2}$

05. (FUVEST-SP) Uma ONG decidiu preparar sacolas,

$$C = 66 = 66_{n, 2} n!$$

$\Rightarrow \Rightarrow$ contendo 4 itens distintos cada um, para distribuir entre

$(n - 2 2)!$ a população carente. Esses 4 itens devem ser escolhidos

n entre 8 tipos de produtos de limpeza e 5 tipos de alimentos não perecíveis. Em cada sacola, deve haver pelo

menos um item que seja alimento não perecível e pelo

Resolvendo a equação anterior, temos $n = -11$ menos um item que seja produto de limpeza. Quantos

(não convém) e $n = 12$ (convém). tipos de sacolas distintas podem ser feitos? Portanto, havia 12 pessoas na festa. A) 360

B)
420

C)
540

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFMG–2006) A partir de um grupo de oito pessoas, quer-se

formar uma comissão constituída de quatro integrantes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nesse grupo, incluem-se Gustavo e Danilo, que, sabe-se,

não se relacionam um com o outro. Portanto, para

evitar problemas, decidiu-se que esses dois, juntos, **01.** (UFPE–2007) Admita que, em um exame com 10 questões,

não deveriam participar da comissão a ser formada. um estudante tem de escolher 8 questões para serem

Nessas condições, de quantas maneiras distintas pode-se respondidas. Quantas escolhas o estudante fará, se ele

formar essa comissão? deve responder à primeira ou à segunda questão, mas

não
a
ambas?

A) 70 C) 45

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

B) 35 D) 55

02. 02. (UFV-MG) Na primeira fase de um campeonato de futebol, (UFSCar-SP) A câmara municipal de um determinado

município tem exatamente 20 vereadores, sendo que os times participantes são divididos em 8 grupos de

12 deles apoiam o prefeito, e os outros são contra. n times. Se, em cada grupo, todos os times se enfrentam

O número de maneiras diferentes de se formar uma única vez, então o número de jogos realizados nessa

uma comissão contendo exatamente 4 vereadores fase é

situacionistas e 3 opositoristas é A) $n(n - 1)$ C) $8n$ E) $4n$

A) B) $8n(n - 1)$ D) $4n(n - 1)$ 27 720 D) 495

B) 13 860 E) 56

C) 551 **03.** (PUC RS) O número de jogos de um campeonato de

futebol disputado por n clubes ($n \geq 2$), no qual todos se

03. enfrentam uma única vez, é (UFJF-MG-2009) De quantas maneiras podemos escolher

3 números naturais distintos entre os inteiros de 1 a 20, $n_2 - n$ A)
D) $n \geq 2$ de modo que a soma dos números escolhidos seja ímpar?

A) $n_2 \geq 100$ D) 720 B) $E) n! \geq 2$ B) 360 E) 1 140

C) 570 C) $n_2 - n$

4 Coleção Estudo

Combinações I

04. (UFC) O número **MÁXIMO** de pontos de interseção entre **08.**
(UFU-MG) Considere **A, B, C, D, E, F e G** pontos num

10 circunferências distintas é mesmo plano, tais que, entre esses pontos, não existam

A) 100 três que sejam colineares. Quantos triângulos podem ser

B) formados com vértices dados por esses pontos, de modo 90

C) 45 que não existam triângulos de lado AB, nem de lado BC?

D) 32 A) 34

E) 20 B) 35

C)
26

05. (FUVEST-SP) Participam de um torneio de voleibol D) 25

20 times distribuídos em 4 chaves, de 5 times cada uma.

Na 1ª fase do torneio, os times jogam entre si uma única **09.** (PUC Minas) Sobre a reta **r**, tomam-se três pontos; sobre

vez (um único turno), todos contra todos em cada chave, a reta **s**, paralela a **r**, tomam-se cinco pontos. Nessas

sendo que os 2 melhores de cada chave passam para a condições, o número de triângulos distintos e com vértices

2ª fase. Na 2ª fase, os jogos são eliminatórios; depois de nesses pontos é

A)
45

cada partida, apenas o vencedor permanece no torneio.

Logo, o número de jogos necessários até que se apure o B) 46

C)
47

campeão do torneio é

D)
48

A) 39

B) 41 **10.** (UFOP-MG) De quantas maneiras podemos distribuir

C) 43

10 alunos em 2 salas de aula com 7 e 3 lugares,

D) 45 respectivamente?

E) 47

A)
120

06. B) 240 (Mackenzie-SP) Uma padaria faz sanduíches, segundo

a escolha do cliente, oferecendo 3 tipos diferentes de C) 14 400

MATEMÁTICA

pães e 10 tipos diferentes de recheios. Se o cliente pode D) 86 400

escolher o tipo de pão e 1, 2 ou 3 recheios diferentes, E) 3 608 800

o número de possibilidades de compor o sanduíche é

A) 525 **11.** (UFJF-MG) Um programa de TV organizou um concurso e,

B) 630 na sua fase final, promoveu o confronto entre os finalistas,

C) 735 de modo que cada um deles se confrontava com cada

D) 375 um dos outros uma única vez. Se foram gravados

E) 450 28 confrontos, é **CORRETO** afirmar que o número de

finalistas
foi

07. (UFRJ) Um campeonato de futebol foi disputado por A) 2

10 equipes em um único turno, de modo que cada B) 4

time enfrentou cada um dos outros apenas uma vez. C) 7

O vencedor de uma partida ganha 3 pontos, e o perdedor

D)
8

não ganha ponto algum; em caso de empate, cada

E)
14

equipe ganha 1 ponto. Ao final do campeonato, tivemos

a seguinte pontuação:

12. (UEL-PR) São dados n pontos, dois a dois distintos entre si,

Equipe 1 20 pontos Equipe 6 17 pontos 4 dos quais pertencem a uma
reta r , e os demais

encontram-se sobre uma reta paralela a r . Se podem

Equipe 2 10 pontos Equipe 7 9 pontos

ser construídos 126 quadriláteros com vértices nesses

Equipe 3 14 pontos Equipe 8 13 pontos pontos, então n é um número

Equipe 4 A) quadrado perfeito. 9 pontos Equipe 9 4 pontos

B)
primo.

Equipe 5 12 pontos Equipe 10 10 pontos

C) múltiplo de 7.

DETERMINE quantos jogos desse campeonato D) menor que 10.

terminaram empatados. E) maior que 15.

Editora Bernoulli 5

Frente A Módulo 09

13. (VUNESP) Considere os algarismos 2, 3, 5, 7, 11. **SEÇÃO** **ENEM**

A quantidade total de números distintos que se obtêm multiplicando-se dois ou mais desses algarismos, sem **01**. (Enem–2009) Doze times se inscreveram em um torneio

repetição, é de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi

A) 120 escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados

4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os

B) 52

times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar

C) 36

o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles

D) 26 jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time

E) 21 visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para

o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do

14. jogo de abertura podem ser calculadas através de (ITA-SP) Um general possui n soldados para tomar uma

posição inimiga. Desejando efetuar um ataque com dois A) uma combinação e um arranjo, respectivamente.

grupos, um frontal com r soldados e outro da retaguarda B) um arranjo e uma combinação, respectivamente.

com s soldados ($r + s = n$), ele poderá dispor seus C) um arranjo e uma permutação, respectivamente.

homens de D) duas combinações.

E)
dois
arranjos.

$n!$

A) maneiras distintas neste ataque.

$(r + s)!$ **02.** Ao visitar uma cidade histórica, Adelson resolveu levar

B) $n!$ presentes para a sua família. Em um dos lados de uma rua, maneiras distintas neste ataque. $r + s!$ há 6 lojas de artesanato e, do outro, 4 lojas de roupas.

C) n Sabe-se que cada loja é especializada em um tipo de $!$ maneiras distintas neste ataque. produto, não havendo a possibilidade de um mesmo $(r + s)!$ $r + s$

item ser encontrado em mais de uma loja. Adelson

D) 2(!) n deseja comprar 3 presentes, sendo apenas 1 em cada maneiras distintas neste ataque. (r s +)! loja. Quantos grupos diferentes de presentes podem ser

E) 2(!) n formados por Adelson, de modo que ele compre pelo maneiras distintas neste ataque. r s !. ! menos um objeto de artesanato e pelo menos uma peça

de
roupa?

15. A) 24 B) 48 C) 72 D) 96 E) 108 (UFU-MG) Um sério problema enfrentado pelas autoridades

de saúde é diagnosticar a chamada pneumonia asiática.

Atualmente, são conhecidos 7 sintomas dessa doença.

GABARITO

Se, em um paciente, forem detectados 5 ou mais desses

possíveis sintomas, a doença é diagnosticada. Diante

Fixação

disso, pode-se afirmar que o número total de combinações

distintas dos sintomas possíveis para que o diagnóstico 01. D 02. A 03. C 04. B 05. E

da pneumonia asiática seja efetivo é igual a **Propostos**

A) 21 C) 147

16. (UFU-MG) Dez equipes disputaram um campeonato de 03. A 11. D

futebol, sendo que cada equipe disputou exatamente 04. B 12. B

duas partidas contra cada uma das demais equipes. 05. E 13. D

De acordo com o regulamento do campeonato, em cada

06. A 14. B

partida foram atribuídos três pontos ganhos para a

07. 17 15. B

equipe vencedora, nenhum ponto ganho para a equipe

derrotada e, em caso de empate, um ponto ganho para 08. C 16. 51
vitórias e 39 empates

cada uma das duas equipes. Sabendo-se que, ao final do **Seção**
Enem

campeonato, foi atribuído um total de 231 pontos ganhos

às equipes, **DETERMINE** quantas partidas terminaram 01. A 02. D

em vitória e quantas terminaram empatadas.

6 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE
Combinações II 10 A

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS 03. (UFVJM-MG–2008) Considere a situação-problema em que, dos 12 funcionários de uma microempresa, 5 são

01. (CEFET-MG–2006) Num plano, existem vinte pontos dos de três funcionários cada uma, e em nenhuma delas os mulheres, os trabalhos são realizados por comissões

quais três nunca são colineares, exceto seis, que estão 3 componentes são do mesmo sexo. Com base nessas

sobre uma mesma reta. O número de retas determinadas informações, é correto afirmar que o número de maneiras

pelos vinte pontos é de se compor essas comissões, com tais características,

A) é igual a 150

B) A) 125 B) 176

C) 185 B) 155

D) 205 C) 175

E) 212 D) 165

Resolução: Resolução:

Do total de comissões possíveis, subtraímos as comissões

Inicialmente, consideremos o total de grupos de dois

formadas apenas por homens e apenas por mulheres.

pontos formado a partir dos vinte pontos. Depois,

Assim, temos:

verificamos que, desse total de grupos, devemos subtrair

os grupos formados a partir dos 6 pontos colineares. $12! - 5! - 7! = C_{12,3} - C_{5,3} - C_{7,3} = 175$ 9 3 !. ! 2 3 !. ! 4 3 !. ! Em seguida, acrescentamos a própria reta, que contém

os seis pontos. Assim, temos:

04. (UFMG) Uma urna contém 12 bolas: 5 pretas, 4 brancas

3 vermelhas. O número de maneiras possíveis de se retirar simultaneamente dessa urna um grupo de 6 bolas

que contém pelo menos uma de cada cor é

02. (UFV-MG-2008) Uma equipe de futebol de salão de A) 84

cinco membros é formada escolhendo-se os jogadores B) 252

de um grupo V, com 7 jogadores, e de um grupo W,

C)
805

com 6 jogadores. O número de equipes diferentes que é

D)
924

possível formar de modo que entre seus membros haja,

no mínimo, um jogador do grupo W é **Resolução:**

A) 1 266

Do total de grupos possíveis, retiramos os grupos

B) 1 356

formados apenas por duas cores, já que não é possível

C) 1 246 formar grupos com bolas de uma só cor. Portanto,

D) 1 376 temos:

Resolução: Total de grupos: $C = = 924$ 12!

12, 6 6 6 !. !

Do total de equipes que podem ser formadas com os 9! Apenas bolas pretas e brancas: $C = = 84$ 9, 6

13 jogadores (7 de V e 6 de W), subtraímos as equipes 3 6 !. !

formadas apenas com jogadores do grupo V. Com isso, 8! Apenas bolas pretas e vermelhas: C garantimos a presença de pelo menos um jogador do 8, 6 = = 28 2 6 !. !

grupo W. Assim, temos: 7! Apenas bolas brancas e vermelhas: $C_{7,6} = = 7$ 1 6 !. ! 13 ! 7 ! $C_{13,5} - C_{7,5} = - = 1$ 266 8 5 !. ! 2 5 !. ! Logo, o número de grupos é $924 - 84 - 28 - 7 = 805$.

Editora Bernoulli 7

Frente A Módulo 10

05. (CEFET-MG-2007) Em um bar, vende-se três tipos de **04.**
(FUVEST-SP-2006) Em uma certa comunidade, dois

cervejas: **S**, **B** e **K**. O número de maneiras diferentes homens sempre se cumprimentam (na chegada) com um

que uma pessoa pode comprar quatro garrafas dessas aperto de mão e se despedem (na saída) com outro aperto

cervejas é de mão. Um homem e uma mulher se cumprimentam

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 com um aperto de mão, mas se despedem com

aceno. Duas mulheres só trocam acenos, tanto para se

Resolução: cumprimentarem quanto para se despedirem. Em uma

comemoração, na qual 37 pessoas almoçaram juntas, todos

Devemos determinar o número de maneiras de se

distribuir 4 objetos idênticos (as cervejas) entre as três se cumprimentaram e se despediram na forma descrita

anteriormente. Quantos dos presentes eram mulheres,

marcas **S**, **B** ou **K**. Adotaremos a seguinte ideia:

sabendo que foram trocados 720 apertos de mão?

I. Inicialmente, escrevemos o 4 como uma sequência de A) 16 B) 17
C) 18 D) 19 E) 20

quatro dígitos “1”:

$1\ 1\ 1\ 1 = 4$ **05**. (FJP-MG-2008) O destacamento policial de uma pequena

cidade é composto de um tenente (comandante), três

II. Consideramos dois “separadores”, representados por

sargentos, três cabos e doze soldados. O comandante

barras (“|”), a fim de dividir a sequência em três partes.

precisa organizar uma patrulha composta de um

Por exemplo:

sargento, um cabo e quatro soldados, escolhidos por

“1 | 1 1 | 1” indica uma cerveja **S**, duas **B** e uma **K**. sorteio. Os sargentos chamam-se Antônio, Pedro e

“1 1 | 1 1 |” indica duas cervejas **S**, duas **B** e zero **K**. João. O número de patrulhas diferentes que poderão ser

Portanto, há 6 caracteres considerados, a saber, quatro organizadas sem a participação do sargento João é

dígitos “1” e as duas barras. O número de maneiras A) 1 485 C) 2 970

de distribuir as cervejas é igual ao número de modos B) 1 890 D) 3 455

de posicionarmos os dois separadores nas 6 posições

possíveis, ou seja: EXERCÍCIOS PROPOSTOS

6!

$C_{6,2} = 15$ maneiras

4 2 !. ! **01.** (FUVEST-SP-2007) Em uma classe de 9 alunos, todos

se dão bem, com exceção de Andreia, que vive brigando

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

com Manoel e Alberto. Nessa classe, será constituída uma comissão de cinco alunos, com a exigência de que cada

membro se relacione bem com todos os outros. Quantas

01. (Mackenzie-SP) Num grupo de 10 pessoas temos somente comissões podem ser formadas?

2 homens. O número de comissões de 5 pessoas que A) 71 B) 75 C) 80 D) 83 E) 87

podemos formar com 1 homem e 4 mulheres é

A) 70 D) 210 **02.** (UFMG) O jogo de dominó possui 28 peças

distintas.

B) Quatro jogadores repartem entre si essas 28 peças, 84 E) 252

ficando cada um com 7 peças. De quantas maneiras

C) 140 distintas se pode fazer tal distribuição?

02. 28! 28! 28! (UFES) Uma cidade atravessada por um rio tem 8 bairros 28! A) B) C) D)

situados em uma das margens do rio e 5 bairros situados 7 4 !. ! 4 24 !. ! (!) 7 4 7 21 !!

na outra margem. O número de **POSSÍVEIS** escolhas de

1 bairro qualquer situado em qualquer uma das margens **03.** (UFMG) A partir de um grupo de 14 pessoas, quer-se

do rio e 3 bairros quaisquer situados na outra margem é formar uma comissão de oito integrantes, composta de

A) um presidente, um vice-presidente, um secretário, um 280 D) 1 680

tesoureiro e quatro conselheiros. Nessa situação, de

B) 360 E) 2 160

quantas maneiras distintas se pode compor essa comissão?

C) 480

A) B) 2 C) D) (!) 14! 14! 14! 14!

03. 4 6 !. ! 4 6 8 !. ! 6 10 !. ! (UFV-MG) Um farmacêutico dispõe de 4 tipos de vitaminas

e 3 tipos de sais minerais e deseja combinar 3 desses

nutrientes para obter um composto químico. O número **04.** (Mackenzie-SP) A partir de um grupo de 10 pessoas,

de compostos que poderão ser preparados usando-se, devemos formar k comissões de pelo menos dois

no máximo, 2 tipos de sais minerais é membros, sendo que em todas deve aparecer uma

A) 32 D) 26 determinada pessoa A do grupo. Então, k vale

B) 28 E) 30 A) 1 024 C) 216 E) 1 023

C) 34 B) 512 D) 511

8 Coleção Estudo

Combinações II

05. (UNIRIO-RJ) Um grupo de 9 pessoas, entre elas os irmãos **11.** (ITA-SP-2007) Dentre 4 moças e 5 rapazes deve-se

João e Pedro, foi acampar. Na hora de dormir montaram formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos,

3 barracas diferentes, sendo que, na primeira, dormiram 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas tal

duas pessoas; na segunda, três pessoas; e, na terceira, comissão poderá ser formada?

as quatro restantes. De quantos modos diferentes eles

podem se organizar, sabendo que a única restrição é a **12.** (UECE-2008) O conjunto $\{1\ 995, 1\ 996, 1\ 997, \dots, 2\ 008\}$

de que os irmãos João e Pedro não podem dormir na

mesma barraca? possui, exatamente, X subconjuntos com, no mínimo,

4 elementos. Assinale a alternativa na qual se encontra

A) 1 260 C) 1 155 E) 910

o
valor
de
X.

B) 1 225 D) 1 050

A) 2₁₀ C) 20 020

06. (UEL-PR-2006) Na formação de uma Comissão B) $2_4(2_{10} - 1)$ D)
15 914

Parlamentar de Inquérito (CPI), cada partido indica um
certo número de membros, de acordo com o
tamanho **13.** (Unifor-CE-2008) Três amigos irão ao teatro e seus
de sua representação no Congresso Nacional. Faltam

apenas dois partidos para indicar seus membros. ingressos permitem
que escolham três poltronas, entre

O partido **A** tem 40 deputados e deve indicar 3 membros, cinco pré-
determinadas de uma mesma fila, para sentar-se.

enquanto o partido **B** tem 15 deputados e deve indicar Nessas
condições, de quantas maneiras distintas eles

1 membro. Assinale a alternativa que apresenta o número poderão
se acomodar para assistir ao espetáculo?

de possibilidades diferentes para a composição dos A) 10 B) 12 C)
30 D) 45 E) 60

membros desses dois partidos nessa CPI.

A) 55 D) 40.39.38.15 **14.** (UFC-2007) Escolhemos cinco
números, sem repetição,

B) $(40 - 3) \cdot (15 - 1)$ E) $40! \cdot 37! \cdot 15!$ entre os inteiros de 1 a 20.
CALCULE quantas escolhas

C) 40 distintas podem ser feitas, sabendo que ao menos dois ! . 15 dos cinco números selecionados devem deixar um mesmo 37 3 ! . !

07. resto quando divididos por 5. (FGV-SP–2008) O número de segmentos de reta que têm

ambas as extremidades localizadas nos vértices de um **15.** (UFMG) Um baralho é composto por 52 cartas divididas cubo dado é

A) 12 em quatro naipes distintos.
Cada naipe é constituído por B) 15 C) 18 D) 24 E) 28 **MATEMÁTICA** 13 cartas – 9 cartas numeradas de 2 a 10, mais Valete,

08. (UFMG) Em uma viagem aérea, um passageiro tem, Dama, Rei e Ás, representadas, respectivamente, pelas

em sua bagagem, 20 livros diferentes, entre os quais um letras J, Q, K e A. Um par e uma trinca consistem,

escrito em alemão e um dicionário de alemão. Desses respectivamente, de duas e de três cartas de mesmo

livros, dez pesam 200 g cada um, seis pesam 400 g número ou letra. Um *full hand* é uma combinação de cinco

cada um e quatro, 500 g cada um. No entanto, ele só cartas, formada por um par e uma trinca. Considerando

pode levar 2 kg de livros. Sabendo-se que pretende essas informações, **CALCULE:**

levar o livro em alemão e o dicionário, que pesam,

1. De quantas maneiras distintas se pode formar um *full*

respectivamente, 200 g e 500 g, de quantas maneiras

hand com um par de reis e uma trinca de 2.

distintas poderá obter esses 2 kg?

2. De quantas maneiras distintas se pode formar um *full*

09. (FGV-SP-2007) Três números inteiros distintos de *hand* com um par de reis.

-20 a 20 foram escolhidos de forma que seu produto seja

um número negativo. O número de maneiras diferentes 3. De quantas maneiras distintas se pode formar um *full*

de se fazer essa escolha é *hand*.

A) 4 940 C) 3 820 E) 3 280

B) 4 250 D) 3 640 **16.** (Mackenzie-SP-2008) Na figura, o quadrado ABCD é

10. formado por 9 quadrados congruentes. O total de (UERJ) Para montar um sanduíche, os clientes de uma triângulos distintos, que podem ser construídos, a partir lanchonete podem escolher:

dos 16 pontos, é

I) Um entre os tipos de pão: calabresa, orégano e queijo.

II) A B Um entre os tamanhos: pequeno e grande.

III) De um até cinco entre os tipos de recheio: sardinha,

atum, queijo, presunto e salame, sem possibilidade

de repetição de recheio num mesmo sanduíche.

CALCULE:

A) Quantos sanduíches distintos podem ser montados.

B) O número de sanduíches distintos que um cliente D C

pode montar, se ele não gosta de orégano, só come

sanduíches pequenos e deseja dois recheios em cada A)

516 C) 526 E) 546 sanduíche. B) 520 D) 532

Editora Bernoulli 9

Frente A Módulo 10

17. (UFJF-MG-2006) Um cientista recebeu 5 cobaias para **02.** Uma equipe de 5 cientistas deverá ser formada a partir

usar em seu estudo sobre uma nova vacina. Seus cálculos de um grupo constituído por 7 biólogos, 8 físicos e

indicaram que o número de maneiras **POSSÍVEIS** de 5 geólogos. Tal equipe deverá conter pelo menos um

escolher pelo menos 3 cobaias é geólogo e pelo menos um físico. O total de maneiras

A) 10 B) 16 C) 50 D) 120 E) 60 distintas de se formar tal equipe é

A)

15

504

SEÇÃO ENEM B) 11 730

C)

10

564

01. D) 9 868 Comprovou-se, pela 15ª edição do *Rally* Internacional dos

Sertões, realizada em agosto de 2007, que esta é uma das E) 8 543

provas mais importantes do mundo em termos do número

de inscritos e do grau de
dificuldade do percurso. No mapa
GABARITO a seguir, estão o roteiro do *rally*, que teve
largada em

Goiânia (GO) e chegada em Salvador (BA), e os diversos

postos de controle, que são os pontos destacados, com

Fixação

exceção dos locais de largada e chegada.

01. C 02. B 03. C 04. B 05. C

MARANHÃO MARANHÃO Propostos

PIAUI 01. A PIAUI

Alto Parnaíba - MA Alto Parnaíba - MA São Raimundo Nonato - PI
São Raimundo Nonato - PI

02.
C

Palmas - TO Senhor do Bonfim - BA Senhor do Bonfim - BA Palmas - TO

TOCANTINS Barra - BA Barra - BA Aracajú - SE Aracajú - SE 03. A
TOCANTINS SERGIPE SERGIPE

GOIÁS Minaçu - GO **BAHIA** Lençóis - BA Lençóis - BA **BAHIA** Salvador - BA Salvador - BA **04. D** Chegada Chegada Minaçu - GO *Finish line* **05. E** **GOIÁS**

Goiânia - GO Goiânia - GO

Largada Largada **06. C** *Start Start*

07.
E

08.
1
071

LEGENDA LEGENDA **09. A**

Cross Country Cross Country

10.
A)
186

Disponível em:

RpD4w0YOQiI/AAAAAAAAALw/IIW5lcLv9F4/s400/mapa_

maior_2007.jpg>. Acesso em: 06 ago. 2010. 11.
125

Todos os participantes da prova devem passar pelos 12. D
postos de controle, onde é registrado o tempo que 13. E
gastaram e é fornecido o apoio logístico necessário. Para

14.
14
480

cada posto, é necessária uma equipe de 4 ajudantes.

Deseja-se selecionar equipes para os postos de controle 15. 1. C_4 ,
2. $C_4, 3 = 24$

localizados no estado da Bahia. Sabendo-se que há um 2. $C_4, 2, C_4$,
3. $C_{12}, 1 = 288$

total de 14 candidatos, o total de maneiras de se fazer 3. $C_{13, 1} \cdot C_{4, 2} \cdot C_{12, 1} \cdot C_{4, 3} = 3\,744$ essa seleção é igual a

16.

A

A) $C \cdot C \cdot C_{14, 4} \cdot C_{10, 46, 4}$

17.

B

B) $3 \cdot C_{14, 4}$

C) $C \cdot C_{14, 4} \cdot C_{10, 4}$ **Seção Enem**

2

D) $C + C + C_{14, 4} \cdot C_{10, 46, 4}$

02.

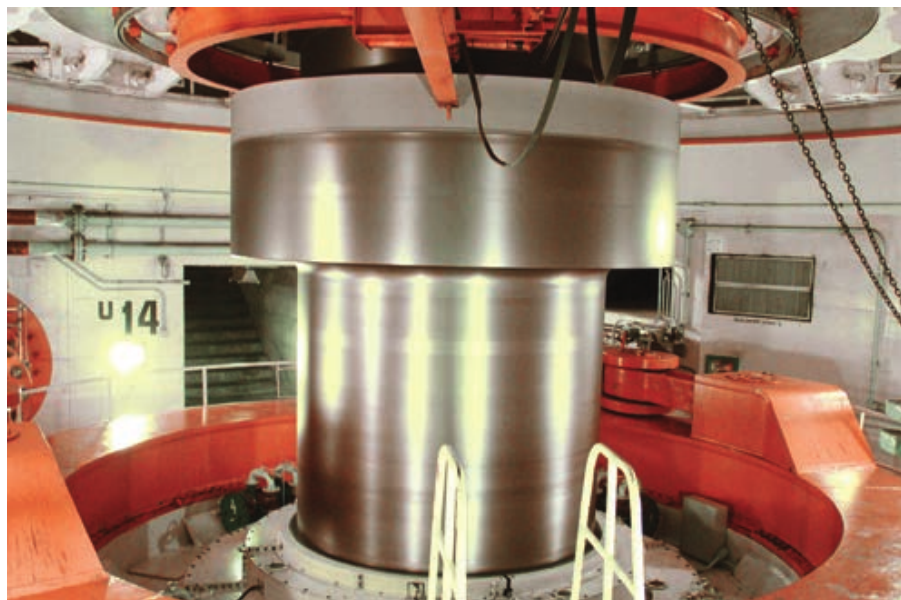
B

E) $2 \cdot C_{14, 4}$

10 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Cilindros 09 B

NOMENCLATURA



Um cilindro circular pode ser oblíquo ou reto, de acordo com a posição relativa entre as geratrizes e os planos das bases.

$O' O'$

g

$h \quad g = h \quad g = h$

$O O$

Cilindro reto

Cilindro oblíquo (geratrizes perpendiculares às bases)

www.blogeducacional.com O cilindro circular reto é também

DEFINIÇÃO revolução, pois é gerado pela rotação de um retângulo em

torno de um eixo que contém um dos seus lados.

eixo

Considere dois círculos de mesmo raio, situados em dois

planos paralelos, e a reta e , que passa pelos centros destes.

Chama-se de cilindro circular a reunião dos segmentos OO' paralelos à reta e que unem os dois círculos.

e

$O' r O r$

Secção meridiana é a intersecção do cilindro com um plano

que contém a reta OO' determinada pelos centros das bases.

A secção meridiana de um cilindro reto é um retângulo.

Podemos identificar em um cilindro circular os

seguintes O'

elementos: r

Bases: círculos congruentes situados em planos paralelos. h

Eixo: é a reta determinada pelos centros das bases.

Geratrizes: são os segmentos, paralelos ao eixo, com r e $2r$

extremidades nas circunferências das bases. cilindro reto secção meridiana

Altura: distância h entre os planos das bases.

Cilindro equilátero é um cilindro cuja secção meridiana é

eixo um quadrado, ou seja, a geratriz e a altura têm medidas

iguais ao dobro da medida do raio da base do cilindro.

O'

r



O'

h

geratriz

$$g = h = 2r$$



O



r O



r r



base

.

Editora Bernoulli 11





Frente B Módulo 09

ÁREA LATERAL Qualquer plano b paralelo a a que secciona o prisma também secciona o cilindro, determinando secções de mesma área A_B .

Planificando a superfície lateral de um cilindro reto, Podemos afirmar, então, que os dois sólidos têm volumes iguais.

obtemos um retângulo de dimensões $2\pi r$ e h . Logo,

a um retângulo de dimensões $2\pi r$ e h a superfície lateral de um cilindro circular reto é equivalente a (comprimento da

circunferência da base) e h (altura do cilindro).

O volume de um cilindro é o produto da área da base pela

medida da altura.

Como $A_B = \pi r^2$, temos:
 $V = A_B \cdot h$

h

$$V = \pi r^2 h$$

r O

$$2 \pi r$$

Portanto, a área lateral do cilindro é:

EXERCÍCIO RESOLVIDO



01. (UNESP) Considerar um cilindro circular reto de altura

$A = 2\pi r h$ cm e raio da base igual a y cm. Usando a aproximação

$\pi = 3$, determinar x e y nos seguintes casos:

ÁREA TOTAL A) O volume do cilindro é 243 cm^3 e a altura é igual ao

triplo
do
raio.

A área total de um cilindro é a soma da área lateral

(A B) A área da superfície lateral do cilindro é 450 cm^2 e a)

com as áreas das duas bases ($A = r^2$); logo: B p altura tem 10 cm a mais que o raio.

$$A = A + 2A \quad A = 2 r h + 2 \pi r^2 \Rightarrow \pi p r^2$$

Resolução: $\Rightarrow A)$



$$A_T = 2 \pi r(h + r)$$



$$x = 3y$$



r



O y



superfície lateral h Como o volume do cilindro é 243 cm^3 , temos:



$$V = A_B \cdot H \Rightarrow 243 = \pi y^2 \cdot 3y \Rightarrow 243 = 9 \cdot y^3 \Rightarrow$$



$$y^3 = 27 \Rightarrow y = 3 \text{ cm}$$

$$\text{r Mas, } x = 3y \Rightarrow x = 9 \text{ cm.}$$

Portanto, $x = 9 \text{ cm}$ e $y = 3 \text{ cm}$.

$$2\pi r B)$$



VOLUME DO CILINDRO



$$x = y + 10$$

Consideremos um cilindro e um prisma, ambos de altura

h e área da base A . Suponhamos que os dois sólidos B

possuam bases num mesmo plano α , como mostrado na O y figura a seguir:



Como a área lateral do cilindro é 450 cm^2 , temos:

$$A_{\text{A}} = 2\pi r_A x \Rightarrow 450 = 6\pi y(y + 10) \Rightarrow 75 = y^2 + 10y \\ \Rightarrow y^2 + 10y - 75 = 0 \Rightarrow$$

$$r_A = y = 5, \text{ pois } y > 0$$

$$\text{Logo, } x = y + 10 \Rightarrow x = 15 \text{ cm.}$$

12 Coleção Estudo

Cilindros

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO 04. (UFSM-RS)

Um suco de frutas é vendido em dois tipos de latas cilíndricas: uma lata L de altura h e raio r e uma lata **01**. L₂ (FUVEST-SP) Uma metalúrgica fabrica barris cilíndricos de de altura h_2 e raio r_2 . A lata L₁ é vendida por R\$ 1,50 e a

dois tipos, A e B, cujas superfícies laterais são moldadas lata L é vendida por R\$ 0,80. Assinale **VERDADEIRA (V)** 2

ou **FALSA (F)** em cada uma das afirmações a seguir:

a partir de chapas metálicas retangulares de lados **a** e **2a**,

soldando lados opostos dessas chapas, conforme ilustrado (1) Se $h = 4h$ e $r = r$, é mais econômico comprar 2 1 2 || || 1 2 () a seguir: a lata L_2 .

a Barril do tipo A (1) Se $h_2 = 2h_1$ e $r_2 = r_1$, é mais econômico comprar 2 () a lata L_1

2a (3) (2) Se $h = h$ e $r = r$, é mais econômico comprar 2 || || 1 2 || || 1 2 3 Barril do tipo B () ()

a lata L_1

A sequência **CORRETA** é

A) V V F. D) V V V.

2a 2a

B) F V F. E) F F V. C) V F V.

a

05. (UFMG) Num cilindro de 5 cm de altura, a área da base

Se V_A e V_B indicam os volumes dos barris dos tipos é igual à área de uma seção por um plano que contém o

A e B, respectivamente, tem-se eixo do cilindro, tal como a seção ABCD na figura a seguir:

A) $V_A = 2V_B$ B) $V = 2V_B$ A A C) $V = V$ MATEMÁTICA_{A B}

D) $V_A = 4V_B$ C



E) $V_B = 4V_A$



D

eixo

02. (UFJF-MG) Aumentando-se o raio de um cilindro em 4 cm

e mantendo-se a sua altura, a área lateral do novo cilindro O volume desse cilindro é de

é igual à área total do cilindro original. Sabendo-se que

a altura do cilindro original mede 1 cm, então o seu raio 250 3 A) cm.

π

mede, em cm,

A) 500 1 C) 4 B) cm^3 .

B) π 2 D) 6

C)
625
3
cm.

03. π (UNESP–2009) A base metálica de um dos tanques de armazenamento de látex de uma fábrica de preservativos 125 D) cm^3 .

cedeu, provocando um acidente ambiental. Nesse π

acidente, vazaram 12 mil litros de látex. Considerando

a aproximação $\pi = 3$, e que 1 000 litros correspondem

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

a 1 m^3 , se utilizássemos vasilhames na forma de um

cilindro circular reto, com 0,4 m de raio e 1 m de altura, **01.** (UFMG) Um aquário cilíndrico, com 30 cm de altura e área

a quantidade de látex derramado daria para encher da base igual a 1 200 cm^2 , está com água até a metade

exatamente quantos vasilhames? de sua capacidade. Colocando-se pedras dentro desse

A) 12 aquário, de modo que fiquem totalmente submersas,

B) 20 o nível da água sobe para 16,5 cm. Então, o volume das

C) 22 pedras é

D) 25 A) 1 200 cm^3 . C) 1 500 cm^3 .

E) 30 B) 2 100 cm^3 . D) 1 800 cm^3 .

Editora Bernoulli **13**

Frente B Módulo 09

02. (UFOP-MG) Num cilindro circular reto, o raio da base e a **06.**
(UNESP) Um tanque subterrâneo, que tem a forma de um

altura medem 3 cilindro circular reto na posição
vertical, está completamente cm e 12 cm ,
respectivamente. Então,

podemos afirmar que o valor de sua área lateral, em
cm 2 cheio com 30 m^3 de água e 42 m^3 de petróleo. 2 ,
é

A) p

B) 16 p Petróleo

C) 2p 12 m

D) 12 p

E) $\pi 6$

3

Se a altura do tanque é 12 metros, a altura, em metros,

03. (UFRRJ) Carlos é um rapaz viciado em beber refrigerante da
camada de petróleo é

diet. Um dia, voltando do trabalho, ele passou em 7π
 8π A) 2 p C) E) frente a uma companhia de gás, em que viu um
enorme 3 3

reservatório cilíndrico de 3 metros de altura com uma base B) 7 D)

Água

de 2 metros de diâmetro e pensou... “Em quanto tempo

eu beberia aquele reservatório inteiro, se ele estivesse **07.** (UFAL)
Na figura a seguir têm-se duas vistas de um tanque

cheio de refrigerante *diet*?” Considerando para peixes, construído em uma praça pública. $p = 3,14$

e sabendo-se que Carlos bebe 3 litros de refrigerante

diet por dia, pode-se afirmar que ele consumiria todo o

líquido do reservatório em um período de

A) 86 dias.

B) 86 meses. Suas paredes são duas superfícies cilíndricas com altura

C) 86 anos. de 1,2 m e raios da base medindo 3 m e 4 m. Se, no

D) 8,6 anos. momento, a água no interior do tanque está alcançando

E) 860 meses. 3 de sua altura, quantos litros de água há no tanque?

4

04. $\left(\begin{matrix} 22 \\ 7 \end{matrix} \right)$ (UNESP) Se quadruplicarmos o raio da base de um Use: π
= $\frac{22}{7}$ cilindro, mantendo a sua altura, o volume do cilindro fica
multiplicado por A) 1 980 C) 6 600 E) 66 000

B) 3 300 D) 19 800

A) 16

B) 12 **08.** (UFPE) Qual das propostas a seguir pode ser utilizada

C) 8

para duplicar o volume de um cilindro modificando seu

D) 4 raio da base e sua altura?

E) 4p A) Duplicar o raio e manter a altura.

B) Aumentar a altura em 50% e manter o raio.

05. (UFJF-MG) Uma certa marca de leite em pó era vendida C)
Aumentar o raio em 50% e manter a altura.

em uma embalagem, completamente cheia, no formato D) Duplicar
o raio e reduzir a altura à metade.

de um cilindro circular reto de altura 12 cm e raio da E) Duplicar a
altura e reduzir o raio à metade.

base 5 cm, pelo preço de R\$ 4,00. O fabricante alterou a

embalagem, aumentando em 2 cm a altura e
diminuindo **09.** (Fatec-SP) Um tanque para depósito de
combustível

em 1 cm o raio da base, mas manteve o preço por tem a forma
cilíndrica de dimensões: 10 m de altura e

unidade. Então, na realidade, o preço do produto 12 m de diâmetro.
Periodicamente é feita a conservação

A) diminuiu. do mesmo, pintando-se sua superfície lateral externa.

B) se manteve estável. Sabe-se que com uma lata de tinta pintam-se
14 m² da

superfície. Nessas condições, é verdade que a **MENOR**

C) aumentou entre 10% e 20%.

quantidade de latas que será necessária para a pintura

D) aumentou entre 20% e 30%. da superfície lateral do tanque é

E) aumentou entre 30% e 40%. A) 14 B) 23 C) 27 D) 34 E) 54

10. (UFRN) Um fabricante de doces utiliza duas **13.** (UFV-MG–2008) Um homem utiliza um balde cilíndrico, de

embalagens, **X** e **Y**, para acondicionar seus produtos. 30 cm de diâmetro da base e 35 cm de altura, para pegar

A primeira **X** tem formato de um cubo com aresta de água numa fonte com o objetivo de encher um tanque de

9 cm, e a segunda **Y** tem formato de um cilindro reto, volume $V = 264\,600 \text{ cm}^3$. Cada vez que vai à fonte, ele

cuja medida da altura e do diâmetro da base medem, enche 4 do balde de água e no caminho derrama 10%

5

cada uma, 10 cm. Sendo assim, podemos afirmar que deste conteúdo. Estando o tanque inicialmente vazio,

A) a área total da embalagem **Y** é 3 o número de viagens à fonte que o homem terá que trazer da área total da embalagem **X**. 5 6 para que a água no tanque atinja do volume V_T é 7

B) o volume da embalagem **Y** é do volume da A) 3

4 40 B) 50 C) 30 D) 20

embalagem **X**.

C) a área total da embalagem **X** é menor que a área **14.** (UFV-MG) Deseja-se construir um recipiente fechado

D) o volume da embalagem X é menor que o volume da total da embalagem Y. em forma de um cilindro circular reto com área lateral $2\ 144\ \pi\ m$ e a altura de 12 m. A) **DETERMINE** o volume do recipiente. embalagem Y.

B) Supondo que o metro quadrado do material a ser

11. utilizado custa R\$ 10,00, **CALCULE** o valor gasto na (UERJ) Um recipiente cilíndrico de 60 cm de altura e construção do recipiente. (Considere

$$\pi = 3,14)$$

base com 20 cm de raio está sobre uma superfície plana

horizontal e contém água até a altura de 40 cm, conforme **15.** (UNESP) Considere uma lata cilíndrica de raio r e altura h

indicado na figura. completamente cheia de um determinado líquido. Esse

líquido deve ser distribuído totalmente em copos também

20 cm

cilíndricos, cuja altura é um quarto da altura da lata e

cujo raio é dois terços do raio da lata.

DETERMINE

60 cm A) os volumes da lata e do copo, em função de r e h .

40 cm B) o número de copos necessários, considerando que os

MATEMÁTICA

copos serão totalmente cheios com o líquido.

16. (UFPE) Na figura a seguir, os pontos **A** e **B** estão nos

Imergindo-se totalmente um bloco cúbico no recipiente, 15 e altura
12. Os pontos **A** e **C** pertencem a uma círculos das bases de um
cilindro reto de raio da base

o nível da água sobe 25%. Considerando p igual a $3, \pi$

a medida, em cm, da aresta do cubo colocado na água geratriz do
cilindro e o arco BC mede 60 graus. Qual a

é igual a **MENOR** distância entre **A** e **B** medida sobre a superfície

A) 10^{12} do cilindro? C) 10^{12}

B) 10^3 D) 10^3 12_{60° C B

12. (UFJF-MG) Um certo produtor rural fabrica queijos

no formato de cilindro circular reto de 15 cm de

A

raio da base e 5 cm de altura. Depois, esses queijos

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

são cortados em 6 pedaços iguais, cujas bases têm

o formato de setor circular (como ilustra a figura),

17. (Unicamp-SP) Um cilindro circular reto é cortado por

e cada pedaço é embalado com papel alumínio. um plano não
paralelo à sua base, resultando no sólido

RESPONDA, justificando sua resposta, se uma folha ilustrado na
figura a seguir. **CALCULE** o volume desse

retangular de papel alumínio, com 30 cm de largura por sólido em termos do raio da base r , da altura máxima $AB = a$

15 cm de comprimento, possui papel suficiente para e da altura mínima $CD = b$. **JUSTIFIQUE** seu raciocínio.

cobrir a superfície total de um desses pedaços de queijo. B

D



a

b

A r C

Editora Bernoulli 15

Frente B Módulo 09

18. (UNIFESP–2006) A figura indica algumas das dimensões **02.** (Enem–2008) A figura a seguir mostra um reservatório de

de um bloco de concreto formado a partir de um cilindro água na forma de um cilindro circular reto, com 6 m de

circular oblíquo, com uma base no solo, e de um altura. Quando está completamente cheio, o reservatório

semicilindro. Dado que o raio da circunferência da base é suficiente para abastecer, por um dia, 900 casas cujo

do cilindro oblíquo mede 10 cm, o volume do bloco de consumo médio diário é de 500 litros de água.

concreto, em cm³, é



1,2 m



1,0 m 6 m



solo



A) 11 000p



B) 10 000p Suponha que, um certo dia, após uma campanha de



C) 5 500p conscientização do uso da água, os moradores das 900



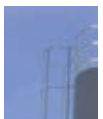
D) 5 000 casas abastecidas por esse reservatório tenham feito p



E) 1 100p₃ economia de 10% no consumo de água. Nessa situação,



A) a quantidade de água economizada foi de 4,5 m .

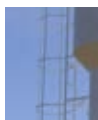


19. B) a altura do nível da água que sobrou no reservatório, (UFOP-MG–2008) Um recipiente cilíndrico, com no final do dia, foi igual a 60 cm. graduação, na altura, em centímetros, está cheio de água C) a quantidade de água economizada seria suficiente até a marca 30.

Imerge-se nele uma pedra, elevando-se para abastecer, no máximo, 90 casas cujo consumo o nível da água para 40. O raio da base do recipiente diário fosse de 450 litros.



mede 8 cm e a densidade da pedra é 2 kg/L (quilogramas



D) os moradores dessas casas economizariam mais



por litro). Considerando $p = 3,1$, a massa da pedra, de R\$ 200,00, se o custo de 1 m³ de água para o



em quilogramas, está **MAIS PRÓXIMA** de consumidor fosse igual a R\$ 2,50.



A) 2 C) 6 E) um reservatório de mesma forma e altura, mas com



raio da base 10% menor que o representado, teria



B) 4 D) 8

água suficiente para abastecer todas as casas.

SEÇÃO ENEM 03. (Enem–2009) Em uma praça pública, há uma fonte que

é formada por dois cilindros, um de raio r e altura h_1

01. e o outro de raio R e altura h_2 . O cilindro do meio enche e,

(Enem–2009) Em uma padaria, há dois tipos de forma após transbordar, começa a encher o outro.

de bolo, formas 1 e 2, como mostra a figura a seguir:

1 2



$\beta A A_{12}$



Sejam L o lado da base da forma quadrada, r o raio da



base da forma redonda, A_1 e A_2 as áreas das bases das



formas 1 e 2, e V_1 e V_2 os seus volumes, respectivamente.

Se as formas têm a mesma altura h , para que elas r

comportem a mesma quantidade de massa de bolo, qual R

é a relação entre r e L ?

A) $h L = r$ Se $R = r^2$ e $h = 1$ e, para encher o cilindro do meio, $2/3$
B) $L = 2r$ foram necessários 30 minutos, então, para se conseguir

C) $L = \pi r$ pr encher essa fonte e o segundo cilindro, de modo que
fique

D) $L = r \pi$ A) completamente cheio, serão necessários 20 minutos. D)
50 minutos.

E) $L = \pi^2 r$ B) 30 minutos. E) 60 minutos.

2 C) 40 minutos.

16 Coleção Estudo

Cilindros

04. (Enem-2000) Uma empresa de transporte armazena **06.** (Enem 2009) Um chefe de cozinha utiliza um instrumento

seu combustível em um reservatório cilíndrico enterrado cilíndrico afiado para retirar parte do miolo de uma

horizontalmente. Seu conteúdo é medido com uma vara laranja. Em seguida, ele fatia toda a laranja em seções

graduadas em vinte intervalos, de modo que a distância perpendicular ao corte feito pelo cilindro. Considere

entre duas graduações consecutivas representa sempre que o raio do cilindro e da laranja sejam iguais a 1 cm e

o mesmo volume. a 3 cm, respectivamente.

3 cm

A ilustração que melhor representa a distribuição das graduações na vara é:

A) B) C) D) E)

A área da maior fatia possível é

A) duas vezes a área da seção transversal do cilindro.

B) três vezes a área da seção transversal do cilindro.

C) quatro vezes a área da seção transversal do cilindro.

05. (Enem–2006) Uma artesã confecciona dois diferentes tipos D) seis vezes a área da seção transversal do cilindro.

de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de E) oito vezes a área da seção transversal do cilindro.

papel retangulares de 20 cm x 10 cm (conforme ilustram

as figuras a seguir). Unindo dois lados opostos do cartão, **07.** (Enem–2010) Dona Maria, diarista na casa da família

de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, Teixeira,

precisa fazer café para servir as vinte pessoas

os preenche completamente com parafina. que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, **MATEMÁTICA**

Tipo I Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos

20 cm plásticos, também cilíndricos.

8 cm

10 cm

4 cm

20 cm

Tipo II

4 cm

10 cm

Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja

colocar a quantidade mínima de água na leiteira para

20 cm

encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso

ocorra, Dona Maria deverá

A) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume

20 vezes maior que o volume do copo.

B) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume

Supondo-se que o custo da vela seja diretamente 20 vezes maior que o volume do copo.

proporcional ao volume de parafina empregado, o custo C) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume

da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, 10 vezes maior que o volume do copo.

será D) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume

A) o triplo. D) a metade. 10 vezes maior que o volume do copo.

B) o dobro. E) a terça parte. E) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume

C) igual. 10 vezes maior que o volume do copo.

Editora Bernoulli 17

Frente B Módulo 09

08. (Enem–2010) Para construir uma manilha de esgoto,

um cilindro com 2 m de diâmetro e 4 m de altura

GABARITO

(de espessura desprezível) foi envolvido homogeneamente

por uma camada de concreto, contendo 20 cm de **Fixação**

espessura. Supondo que cada metro cúbico de concreto

custe R\$ 10,00 e tomando 3,1 como valor aproximado

de 01. A 02. B 03. D 04. A 05. B p , então o preço dessa manilha é igual a

A) R\$ 230,40. **Propostos**

B) R\$ 124,00.

C) R\$ 104,16. 01. D

D) R\$ 54,56. 02. E

E) R\$ 49,60. 03. D

09. 04. A (Enem–2010) Uma empresa vende tanques de combustíveis de formato cilíndrico, em três tamanhos, 05. E com medidas indicadas nas figuras. O preço do 06. B tanque é diretamente proporcional à medida da

07.
D

área da superfície lateral do tanque. O dono de um

08.
D

posto de combustível deseja encomendar um tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade de 09. C armazenamento. Qual dos tanques deverá ser escolhido 10. D pelo dono do posto? (Considere $\pi \approx 3$)

11.
D

4 m 6 m 12. Não

13.

A

6 m 14. A) 432 8 mp m₃

(I) (III) B) R\$ 6 782,40

15. A) $V(\text{lata}) = \pi r^2 h$

$V(\text{copo}) = \pi r^2 h$

4 m 9

B)
9
copo

8 m 16. D (II) $2 \pi r a b (+)$ 17. $V =$

A) I, pela relação área/capacidade de armazenamento 2

18.
A

1

de .

3 19. B

B) I, pela relação área/capacidade de armazenamento **Seção**
Enem

de 4 .

3

01.
D

C) II, pela relação área/capacidade de armazenamento

de . 03. C 3

4

D) III, pela relação área/capacidade de armazenamento 04. A

de 2 05. B . 3 06. E

E) III, pela relação área/capacidade de armazenamento 07. A

de 7 08. D . 12 09. D

18 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Cones 10 B

NOMENCLATURA



Se o eixo do cone é oblíquo ao plano da base, temos
um

cone
circular
oblíquo.

eixo

V

h

O

DEFINIÇÃO Se o eixo do cone é perpendicular
ao plano da base, temos

um
cone
circular
reto.

Considere um círculo de centro O e raio r situado
num

plano a eixo e um ponto V fora de a

. Chama-se cone circular a

reunião dos segmentos de reta com uma extremidade
em V e a outra no círculo.

V



O



r O



α O cone circular reto é também chamado cone de revolução,



pois é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em



Podemos identificar em um cone circular os seguintes



elementos: torno de um eixo que contém um de seus catetos.



Base: o círculo de centro **O** e raio **r**. eixo



Vértice: o ponto **V**.

Geratrizes: são os segmentos com uma extremidade em

V e a outra na circunferência da base.

Altura: distância entre o vértice do cone e o plano da base.

Eixo: é a reta que contém o vértice e o centro da base.

eixo h g

V



geratriz

h O r

r O



α



$$g^2 = h^2 + r^2$$



raio da base base





Frente B Módulo 10

Secção meridiana é a intersecção do cone com um plano. Para determinarmos o ângulo θ , fazemos uma outra

que contém o seu eixo. A secção meridiana de um cone proporcional: circular reto ou cone de revolução é um triângulo isósceles. **Comprimento** **Ângulo**

do arco

V 2pg _____ 2p rad ou 360°



$$2\pi r \theta$$

g g g g

h Daí, temos:



$$\theta = \frac{2\pi r}{360} \text{ rad ou } \theta = \frac{2\pi r}{360} \text{ graus}$$



cone reto secção meridiana **ÁREA**
TOTAL



Cone equilátero é um cone cuja secção meridiana é um



triângulo equilátero ($g = 2r$ e $h = r\sqrt{3}$). A área total de um cone é a soma da área lateral (A_L) com a área da base (A_B); logo:

$$A = A_{\text{base}} + A_{\text{top}} \Rightarrow A = \pi r_B^2 + \pi r_T^2$$



$$A_{\text{base}} = \pi r_B^2 = \pi r_T^2$$

θ



$$A_{\text{superfície lateral}} = \pi r(g + r)_{\text{later}} \text{ ou } 2\pi r O$$



base

ÁREA LATERAL VOLUME DO CONE



Planificando a superfície lateral de um cone reto,
Consideremos um cone e um tetraedro, ambos de
altura **h**

obtemos um setor circular de raio g (geratriz) e cujo arco e área da base A . Suponhamos que os dois sólidos possuam correspondente mede $2\pi r$. Logo, a superfície lateral de um bases em um mesmo plano a , como mostrado na figura a seguir: cone reto de raio de base r e geratriz g é equivalente a um

setor circular de raio g e comprimento do arco $2\pi r$. h'

$$A = A_1 = h \beta$$

$$g$$

$$A = A_{BB}$$

$$\theta = \alpha$$

$2\pi r$ Qualquer plano b paralelo a a que secciona o cone também

g secciona o tetraedro. Sendo as áreas das secções A e A_{12}

h respectivamente, temos:

$$A_{12} \left(\frac{h'}{h} \right) = A \left(\frac{h'}{h} \right)$$

$$r_{12} = e \left| \begin{matrix} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{matrix} \right|$$

$$A \left(\frac{h}{h_B} \right) = A_B \left(\frac{h}{h_B} \right)$$

A área lateral do cone reto pode, então, ser calculada por Logo, $A = A_{12}$, para todo plano paralelo a a . Então, o cone 12 b a

uma simples proporção: e o tetraedro têm volumes iguais.

Comprimento Área g V do arco do setor $V_{\text{cone}} = V_{\text{tetraedro B}}$
 $= \frac{1}{3} A \cdot h$

3

O volume de um cone é um terço do produto da área da

base pela medida da altura. $V = \frac{1}{3} A \cdot h$

Como
 $A = \pi r^2$,
 temos:
 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Daí, temos:



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow A = \frac{3V}{r^2} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 h}{r^2} = \pi r^2$$





Cones

EXERCÍCIO RESOLVIDO Razão de semelhança

01. Dados dois cones semelhantes, a razão entre dois

(PUC RS) O raio da base de um cone circular reto e a

elementos lineares homólogos é denominada razão de
aresta da base de uma pirâmide quadrangular
regular

semelhança. Essa razão será representada por **k**.

têm mesma medida. Sabendo que suas alturas medem

4 cm, então a razão entre o volume do cone e o da

h

pirâmide é a r H

A) $1/8$

B) $4/27$ C) π

D) $1/27$ E) $3/4$

Resolução:

Para razões entre áreas homólogas, temos:



$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$$



$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

a Para razões entre volumes dos cones semelhantes,
a

em que V e v são os volumes dos cones grande e
pequeno,

Sejam a o raio da base do cone e a a aresta da base
respectivamente, temos:

da pirâmide.

Sejam V e V o volume do cone e da pirâmide, $1_{cp} \cdot A$
 $H \cdot V_B A 3_B H =_B H$ respectivamente. Logo: $=_3 \dots = k_2$
 $.k = k$ **MATEMÁTICA** $v 1 a a h h \dots a h_{BB} 1 1 4 V$
 $= .A .H = a_{cB} p a_2 4 = p_{2B} e 3 3 3 3$

Podemos, então, generalizar da seguinte maneira:

$V 1 1 4_2 = .A .H = a 4 = a_{2pB} 3 3 3$ i) A razão entre
áreas homólogas de quaisquer dois

Daí, $V a_c 3 = = p$ ii) A razão entre os volumes de dois sólidos
semelhantes $V 4_2$ semelhança. π sólidos semelhantes é igual ao
quadrado da razão de

$p 4_2 a$ é igual ao cubo da razão de semelhança. 3

TRONCO DE CONE

Dados o raio R da base maior, o raio r da base menor e h o Volume do tronco de cone

a medida da altura do tronco, o volume do tronco de cone

Seccionando-se um cone por um plano paralelo à base,

pode ser obtido por meio da fórmula:

obtemos um sólido denominado tronco de cone. Veja:



r

Tronco de

cone



h



R



O novo cone e o cone primitivo têm bases semelhantes,



e os elementos lineares homólogos (raios das bases,



geratrizes, alturas, etc.) são proporcionais. Assim, dizemos $\pi h V_T = [R^2 + Rr + r^2]$ que eles são semelhantes.

3







Frente B Módulo 10

EXERCÍCIO RESOLVIDO 02. (UFC-2009) Ao seccionarmos um cone circular reto por um plano paralelo a sua base, cuja distância ao vértice

02. (FUVEST-SP) Um copo tem a forma de um cone com sólidos: um cone circular reto S e um tronco de cone S_1 . Se a altura do cone S é igual a um terço da sua altura, obtemos dois

volumes. A altura do cone S é 8 cm e o raio da base é 3 cm. Queremos enchê-lo com volume S_1 . A relação entre as quantidades iguais de suco e de água. Para que isso seja possível, a altura x atingida pelo primeiro líquido colocado A) 33 B) 27 C) 26 D) 9 E) 3

deve ser

03. (Mackenzie-SP) Planificando a superfície lateral de um



cone, obtém-se o setor circular da figura, de centro O

e raio 18 cm. Dos valores a seguir, o **MAIS PRÓXIMO**

da
altura
desse

cone
é

O

8

x 160º

A) 8 cm. C) 4 cm. E) $4^{\frac{3}{4}}$ cm.

3

B) 6 cm. D) $4^{\frac{1}{3}}$ cm.

Resolução: A) 12 cm. D) 16 cm.

B) 18 cm. E) 20 cm. C) 14 cm.



V 04. (UFMG) Um tanque de água tem a forma de um cone

8 circular reto, com seu vértice apontando para baixo.

O raio do topo é igual a 9 m e a altura do tanque é de

V x

27 m. Pode-se afirmar que o volume V da água no tanque,

como função da altura h da água, é



Chamamos de V o volume de suco e de água.

O volume do cone grande é, então, $2V$.

Como os cones das figuras são semelhantes, então a razão entre os seus volumes é igual ao cubo da razão entre as h alturas. Assim, temos:

$$\frac{2^3 V}{4^3 V} = \left(\frac{8}{4} \right)^3 \Rightarrow \frac{8}{64} = \left(\frac{h}{x} \right)^3 \Rightarrow \frac{1}{8} = \left(\frac{h}{x} \right)^3 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{x} \Rightarrow x = 2h$$

π
3
h

$$B) V = \frac{1}{3} \pi h^2 R$$

9

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFJF-MG) O vinho contido em uma jarra cilíndrica será **05.** (PUC-SP-2006) Considere o triângulo isósceles ABC, tal

servido em cálices em forma de cone. A altura de cada que $AB = BC = 10$ cm e $CA = 12$ cm. A rotação desse

1 triângulo em torno de um eixo que contém o lado AB gera

cálice é da altura da jarra e o diâmetro da circunferência

4 um sólido, cujo volume, em centímetros cúbicos, é

2

que forma a sua borda é do diâmetro da base da jarra. 3 A) 256p D)

DETERMINE o número de cálices necessários para que B) 298,6p E) 328,4p

o vinho seja todo servido de uma só vez. C) 307,2p

22 Coleção Estudo

Cones

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 04. (UFSCar-SP)

A figura representa um galheteiro para a colocação de azeite e vinagre em compartimentos

01. diferentes, sendo um cone no interior de um cilindro. (UFMG)

Um cone é construído de forma que

I) sua base é um círculo inscrito em uma face de um

cubo de lado a .

vinagre

II) seu vértice coincide com um dos vértices do cubo

localizado na face oposta àquela em que se encontra a sua base.
azeite 5 cm

Dessa maneira, o volume do cone é de

10 cm

A) $\pi_3 a$

Considerando h como a altura máxima de líquido que o

galheteiro comporta e a razão entre a capacidade total

B) π a₃ de azeite e vinagre igual a 5, o valor de h é

12 A) 7 cm. D) 12 cm.

C) π B) 8 cm. E) 15 cm. a₃

9 C) 10 cm.

D) π a₃ **05.** (UFPE) Um cone reto tem altura $12\sqrt{2}$ cm e está cheio

3

de sorvete. Dois amigos vão dividir o sorvete em duas partes de mesmo volume, usando um plano paralelo à

02. (UFJF-MG-2008) Fernando utiliza um recipiente, em base do cone. Qual deverá ser a altura do cone menor

forma de um cone circular reto, para encher com água assim obtido?

um aquário em forma de um paralelepípedo retângulo. A) 12 cm D) $10\sqrt{2}$ cm

As dimensões do cone são: 20 cm de diâmetro de base B) $12\sqrt{2}$ cm E) $10\sqrt{3}$ cm

e 20 cm de altura, e as do aquário são: 120 cm, 50 cm C) $12\sqrt{3}$ cm

MATEMÁTICA

e 40 cm, conforme ilustração a seguir. **06.**

(Mackenzie-SP) No sólido da figura, ABCD é um quadrado

20 cm de lado e $AE = BE = \sqrt{10}$. O volume desse sólido é

20 cm 50 cm 40 cm

120 cm

Cada vez que Fernando enche o recipiente na torneira do A B jardim, ele derrama 10% de seu conteúdo no caminho e despeja o restante no aquário. Estando o aquário inicialmente vazio, qual é o número mínimo de vezes que E

Fernando deverá encher o recipiente na torneira para que 5 π 4 π A) B) C) 4p D) 5p E) 3p 2 1 3 a água despejada no aquário atinja de sua capacidade? 5

07. (PUC Minas) Na figura, os triângulos retângulos ΔABC

03. (UFOP-MG) Um reservatório de água com a forma de um e ΔCDE são isósceles; $AC = 3$ e $CD = 1$. A medida do

cone circular reto tem 8 m de altura e, sua base, 3 m volume do sólido gerado pela rotação do trapézio ABED,

em torno do lado BC, é

de raio. Se a água ocupa 40% da capacidade total do

A

reservatório, o volume de água nele contido é

A) 960p litros.

B) 4 800p litros. D

C) 2 400p litros. B E C

D) 9 600p litros. A) 26π 24π 22π 21π B) C) D)

E) 96 000p litros. 3 3 3 5

Editora Bernoulli **23**

Frente B Módulo 10

08. (UFC) Um cone circular reto e uma pirâmide de base **13.** (UFSC) A geratriz de um cone equilátero mede $2\sqrt{3}$ cm.

quadrada têm a mesma altura e o mesmo volume. **CALCULE** a área da seção meridiana do cone, em cm^2 ,

Se r é a medida do raio da base do cone, e b é a medida do e **MULTIPLIQUE** o resultado por $\sqrt{3}$.

b

lado da base da pirâmide, então o quociente é igual a r **14.** (PUC-Campinas-SP) Considere o triângulo ABC,

A) 1 representado na figura a seguir, no qual $BC = 6 + 6$ B) 1 C) D) p E) $2p\sqrt{3}$ cm. 3 A **09.** (UFV-MG) Um chapéu, no formato de um cone circular

reto, é feito de uma folha circular de raio 30 cm,

recortando-se um setor circular de ângulo 2π $\theta = 45^\circ$ 30° B C radianos e juntando os lados. A área da base do chapéu,

em cm^2 Por uma rotação de 360° em torno do lado BC, obtém-se 2 , é

A) $140p$ um sólido que servirá de modelo para a construção de C)

130p E) 120p

um balão. O volume desse modelo, em centímetros

B) 110p D) 100p cúbicos, será

A) $(13 + 3)72p$ D) $(13 + 1)36p$

10. (UFRRJ) Considerando um lustre de formato cônico B) $(13 + 1)72p$ E) $(13 + 3)24p$

com altura e raio da base igual a 0,25 m, a distância C) $(13 + 3)36p$

do chão H em que se deve pendurá-lo para obter

um lugar iluminado em forma de círculo com área de **15**. (UFLA-MG-2006) Um reservatório de forma cônica para

25p m₂, é de armazenamento de água tem capacidade para atender

0,25 m às necessidades de uma comunidade por 81 dias. Esse

reservatório possui uma marca a uma altura **h** para indicar

H (distância) que a partir desse nível a quantidade de água é suficiente

para abastecer a comunidade por mais 24 dias. O valor

de
h é

A) 12 m. A) $h = 2/3 H$ D) $h = 3/4 H$ B) 10 m. C) 8 m. D) 6 m. E) 5 m.
9 10

11. B) $h = 2/3 H$ E) $h = H$ (UFRJ) Um recipiente em forma de cone

circular reto de 3 2

altura h é colocado com vértice para baixo e com eixo na C) $h = 8$
 1H

vertical, como na figura. O recipiente, quando cheio até 27
a borda, comporta 400 mL.

16. (FUVEST-SP-2006) Um cone circular reto está inscrito
em um paralelepípedo reto retângulo, de base quadrada,
b

como mostra a figura. A razão entre as dimensões
a

do paralelepípedo é e o volume do cone é p 3. Então,
 h^2

o comprimento g da geratriz do cone é

DETERMINE o volume de líquido quando o nível está b

em $h \cdot g \cdot 2$

12. a (UFG) O volume de um tronco de cone circular reto com a base
de raio R , cuja altura é a quarta parte da altura h

do cone correspondente, é A) 15

A) π B) $^16 \cdot 2 R h^2$ 55 $\pi R h^3$ $\pi R h$ C) E) C) $^17 \cdot 4$ 192 4

24 Coleção Estudo

Cones

17. (UFLA-MG–2007) Parte do líquido de um cilindro **02.** (Enem–2009) Um vasilhame na forma de um cilindro

completamente cheio é transferido para dois cones circular reto de raio da base de 5 cm e altura de 30 cm está

idênticos, que ficam totalmente cheios. ³
parcialmente ocupado por 625 p cm de álcool. Suponha

que sobre o vasilhame seja fixado um funil na forma de

R R

um cone circular reto de raio da base de 5 cm e altura

H H mostra a figura 2, é virado para baixo, sendo H a distância de 6 cm, conforme ilustra a figura 1. O conjunto, como

h_1 da superfície do álcool até o fundo do vasilhame. Volume

$\pi_2 r h$

do cone: $V_{\text{cone}} =$

A relação entre as alturas do líquido restante no cilindro 3

h_1 e a altura H do cilindro é Fundo do 5 cm

A) $h H$ vasilhame = ₁ 4

H 6 cm H

B) $h = \frac{1}{2} H$

C) $h = \frac{1}{3} H$

30 cm

2

D) $h = \frac{1}{3} H$

3 30 cm



SEÇÃO ENEM 6 cm



01. (Enem–1999) Assim como na relação entre o perfil de um

corte de um torno e a peça torneada, sólidos de revolução

MATEMÁTICA

5 cm

resultam da rotação de figuras planas em torno de um

Figura 1 Figura 2

eixo. Girando-se as figuras a seguir em torno da haste

indicada obtêm-se os sólidos de revolução que estão na
Considerando-se essas informações, qual é o valor da

coluna da direita. distância **H**?

A)
5
cm

B)
7
cm

1 A C) 8 cm

D)
12
cm

E)
18
cm

2 B

03. (Enem–2009) Uma empresa precisa comprar uma tampa para o seu reservatório, que tem a forma de um tronco de cone circular reto, conforme mostrado na figura a seguir:

4 D

60°

5 E Considere que a base do reservatório tenha raio

A correspondência correta entre as figuras planas e os sólidos de revolução obtidos é o solo. Se a altura do reservatório é 12 m, a tampa a ser

comprada deverá cobrir uma área de

A) 1A, 2B, 3C, 4D, 5E.

B) 1B, 2C, 3D, 4E, 5A. A) $12p^{22}m$. D) $300p^m$.

C) 1B, 2D, 3E, 4A, 5C. 222 ()

D) 1D, 2E, 3A, 4B, 5C. 22 C) B) $108p^m$. E) $2423 + p^m$.

E) 1D, 2E, 3B, 4C, 5A. $(1223 +)p^m$.

Editora Bernoulli 25

Frente B Módulo 10

04. (Enem–2010) Alguns testes de preferência por bebedouros **05.**

(Enem–2010) Em um casamento, os donos da festa

de água foram realizados com bovinos, envolvendo três serviam
champanhe aos seus convidados em taças com

tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. formato de
um hemisfério (figura 1), porém um acidente

Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone na cozinha
culminou na quebra de grande parte desses

circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da recipientes.
Para substituir as taças quebradas, utilizou-se

base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. um outro
tipo com formato de cone (figura 2). No entanto,

O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, os noivos
solicitaram que o volume de champanhe nos

100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três dois tipos de
taças fosse igual.

recipientes estão ilustrados na figura. $R = 3\text{ cm}$

120 cm 60 cm

$$R = 3 \text{ cm}$$

60 cm 80 cm

h

Bebedouro 1 Bebedouro 2

60 cm

60 cm 30 cm

Figura 1 Figura 2

Consider

$$\text{Bebedouro 3} \quad \frac{1}{2} V = \frac{\pi R^3}{3} \quad \text{e} \quad \frac{1}{3} V = \frac{\pi R^3 h}{3} \quad \text{esfera cone} = \pi$$

A escolha do bebedouro. *Biotemas*. vol. 22, nº 4, 2009
Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida

(Adaptação).

completamente cheia, a altura do volume de champanhe

Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

qual das figuras a seguir representa uma planificação A) 1,33 D) 56,52

para o bebedouro 3? B) 6,00 E) 113,04

100 cm 60 cm C) 12,00

A) D) 60 cm GABARITO 100 cm

60 cm **Fixação**

01. 27 02. C 03. D 04. A 05. C

60 cm

Propos

100 cm

B) E) 01. B 07. A 13. 9

60 cm 02. 26 08. C 14. B 100 cm

03. D 09. D 15. B

04. C 10. E 16. D

05. A 11. V = 50 mL 17. D

60 cm

100 cm 06. E 12. D

60 cm **Seção Enem**

C)

01. D 02. B 03. B 04. E 05. B

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Função exponencial 09 C

INTRODUÇÃO GRÁFICOS

Conta uma lenda que um rei havia prometido realizar Considere a função $y = 3^x$. Vamos atribuir alguns valores

qualquer desejo a quem executasse uma difícil tarefa. à variável, calcular a imagem correspondente e construir o

Quando um dos seus súditos conseguiu realizá-la, o rei viu-se gráfico. Assim, temos: y

obrigado a cumprir a sua promessa. O súdito pediu então que $9 \times x \times y = 3$ as 64 casas de um tabuleiro de xadrez, jogo muito apreciado no reino, fossem preenchidas com grãos de trigo, do seguinte modo: na primeira casa, seria colocado um grão de trigo e, em cada casa seguinte, seria colocado o dobro de grãos que havia na casa anterior. O rei suspirou aliviado, considerando o pedido fácil de ser atendido e ordenou que providenciassem o pagamento.

Tal foi sua surpresa quando os seus

conselheiros, 291 alguns dias depois, anunciaram que o reino encontrava-se $327\frac{1}{3}$ totalmente sem provisões de trigo, uma vez que apenas na $-2-1012$ x última casa o total de grãos era de 2_{63} , o que corresponde a,

18 Do mesmo modo, vamos obter o gráfico da função:

Essa quantidade, juntamente com a soma das quantidades $(1) f(x) = 2$ aproximadamente, $922330000000000000 = 9,2233 \times 10^x$ colocadas nas outras casas, superava em muito não só a (1) capacidade do reino, mas a de todos os outros de que se x

tinha notícia. $f(x) = x(1) || || 2$

(y)

Essa lenda nos dá um exemplo de uma função exponencial, $8-38$

a função $y = 2^x$. As funções exponenciais crescem ou

-24

decrecem muito rapidamente, sendo extremamente

-12

importantes para descrever diversos fenômenos, tais

como crescimento populacional, reprodução de bactérias, 014

1

decaimento radioativo, juros compostos, entre outros.

1 Seu estudo desenvolveu-se notadamente por volta do

2 2 século XVI, com o trabalho de dois matemáticos:
John 2 1 1

4 1/2

Napier (1550-1617) e Henry Briggs (1561-1630). 1 3 -
3 -2 -1 0 1 2 3 x 8

FUNÇÃO EXPONENCIAL De modo geral,
há dois tipos de gráfico para a função $f(x) = a_x$.

i) Se $a > 1$, então a função $f(x) = a_x$ é **crescente**.

Considere uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a_x$, **Exemplo**

com $a > 0$ e $a \neq 1$. Tal função é denominada **função**_x
 $f(x) = 2$ **exponencial**. y

Exemplos

1°) $f(x) = 3_x$ 3°) $f(x) = 0,78_x$

1

$\left(\begin{matrix} x & 1 \end{matrix} \right)$

2°) $f(x) = 4^\circ$ $f(x) = 2,23_x \left(\begin{matrix} 0 & x & 4 \end{matrix} \right)$

Frente C Módulo 09

ii) Se $0 < a < 1$, então a função $f(x) = a_x$ é decrescente.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exemplo

01. Determinar os valores de k para os quais a função

$$f(x) = (1 - x)(3k - x) \quad f(x) = 2 + x \text{ é crescente.}$$

Resolução

Para que a função seja crescente, é necessário que

$$\begin{aligned} 2 + 3k &> 1. \end{aligned}$$

$$5$$

Portanto, temos:

$$1$$

$$2 + 3k > 1 \Rightarrow 3k > -1 \Rightarrow k > -\frac{1}{3}$$

$$5 > 3$$

$$O x$$

Com relação aos gráficos, podemos dizer:

i) Trata-se de uma função injetora, pois a cada 02.

(PUC-SP) Sobre a função $f(x) = e^x$ definida em $\mathbb{R}$,

valor da imagem corresponde um único valor do domínio.

A) tem um único zero no intervalo $[0, 2]$.

ii) O domínio de uma função exponencial é sempre igual $\mathbb{R}$ B) $e < a^x$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}^*$. ao conjunto dos números reais ($D = \mathbb{R}$). C) $e^x > a^x$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}^*$. +

iii) A curva está toda acima do eixo das abscissas, pois $y = a^x$ D) assume valores de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}^*$. x é sempre maior que zero para todo x real. +

Portanto, a sua imagem Im é dada por $\text{Im} = \mathbb{R}^+$.

E) assume valores apenas em $\mathbb{R}^+$.

+ +

iv) A curva corta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$.

Isso ocorre porque, para $x = 0$, temos $y = a_0$

Resolução: $= 1$.

A função $f(x) = e^x$ não possui raízes, pois $e^x > 0$ para todo

OBSERVAÇÃO x real. Portanto, a alternativa A é falsa.

O número e Para $0 < a < 1$, temos que $e^x > a^x$. Portanto, a alternativa

Trata-se de um número irracional, cujo valor é 2,71828... .

Esse número é conhecido como número neperiano, **uma** Para $a > e$, temos que $e_x < a_x$. Portanto, a alternativa referêcia ao matemático escocês John Napier, autor da **C** é falsa.

primeira publicação sobre a Teoria dos Logaritmos. **x** A função $f(x) = e$ possui o seguinte gráfico:

O número **e** é extremamente importante no estudo de juros

e de diversos fenômenos naturais, tais como crescimento y populacional, decaimento radioativo, crescimento de

bactérias, entre outros.

O gráfico da função $y = e_x$ é dado por:

1

y

O x

Observe que se trata de uma função com domínio $\mathbb{R}$

1 e imagem $\mathbb{R}^+$. Portanto, a alternativa **D** é verdadeira. $\mathbb{R}^+$

Conforme visto no item anterior, o domínio não se

O **x** restringe ao conjunto $\mathbb{R}$. Portanto, a alternativa **E** é falsa. $\mathbb{R}^+$

Função exponencial

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO 05. (UEL-PR) O

crescimento de uma colônia de bactérias é descrito por $P(t) = a \cdot 4^{\lambda \cdot t}$, em que $t \geq 0$ é o tempo, dado

01. em horas, e $P(t)$ é a população de bactérias no instante t .

(UFLA-MG–2007) A figura é um esboço do gráfico da

função $y = 2^x$ a b Se, após 4 horas, a população inicial da colônia triplicou, . A ordenada do ponto **P** de abscissa $+ 6$ é

2 após 8 horas o número de bactérias da colônia será

y A) $6a$ C) $9a$ E) $a + 8$

B) $8a$ D) $8a - 4$

d

P EXERCÍCIOS PROPOSTOS

c

01. (FUVEST-SP) Seja $f(x) = 2^{2x+1}$. Se a e b são tais que

O $a \times b \times f(a) = 4f(b)$, pode-se afirmar que

A) $a + b = 2$

A) 1cd B) $^1c + d$ C) cd D) $(cd)^2$

$$B) a + b = 1$$

02. C) $a - b = 3$ (Mackenzie-SP) Na figura, os gráficos I, II e III referem-se,

respectivamente, às funções $y = a_x$, $y = b_x$ e $y = c_x$. D) $a - b = 2$

$$y \text{ E) } a - b = 1$$

I II III

02. (UNIRIO-RJ) Numa população de bactérias, há

$P(t) = 10^a \cdot 4_{3t}$ bactérias no instante t medido em horas (ou fração da hora). Sabendo-se que inicialmente existem

$O \times 10^a$ bactérias, quantos minutos são necessários para que

se tenha o dobro da população inicial? **MATEMÁTICA**

Então, está **CORRETO** afirmar que

A) 20 B) 12 C) 30 D) 15 E) 10

A) $0 < a < b < c$ D) $0 < a < c < b$

B) $0 < b < c < a$ E) $a < 0 < c < b$

C) $a < 0 < b < c$ **03.** (PUC Minas) Os pontos A(1, 6) e B(2, 18) pertencem ao

gráfico da função $y = n \cdot a_x$. Então, o valor de a_n é

03. (UNESP) A trajetória de um salto de um golfinho nas A) 6 B) 9 C) 12 D) 16

proximidades de uma praia, do instante em que ele

saiu da água ($t = 0$) até o instante em que

mergulhou **04.** (PUC Minas) Cada um dos gráficos adiante representa

($t = T$), foi descrita por um observador através do

seguinte modelo matemático: $h(t) = 4t - t^2$, com $0 \leq t \leq T$, uma destas funções:

t em segundos, $h(t)$ em metros e $0 \leq t \leq T$. O tempo, $x \in [1, 2]$

$$f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x + 1 \text{ e } h(x) =$$

em segundos, em que o golfinho esteve fora da água $|| 2 ||$

durante esse salto foi

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 10 y y y

04. (UNIFESP–2009) Sob determinadas condições,

o antibiótico gentamicina, quando ingerido, é eliminado

pelo organismo à razão de metade do volume acumulado

O x O x O x

a cada 2 horas. Daí, se K é o volume da substância no

t

organismo, pode-se utilizar a função $f(t) = K \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ para $|| || 2$
Sobre essas funções, foram feitas três afirmativas: $\left(\right)$

estimar a sua eliminação depois de um tempo t , em horas. I. $f(0) = g(0) = h(0)$

Neste caso, o tempo **MÍNIMO** necessário para que uma

$$\text{II. } g(x) > h(x), \text{ para } x > 0$$

pessoa conserve no máximo 2 mg desse antibiótico no

organismo, tendo ingerido 128 mg numa única dose, é de III. $f(x) > 0$ e $h(x) > 0$, para todo x pertencente aos reais.

A) 12 horas e meia. D) 8 horas.

B) 12 horas. E) 6 horas.

C) 10 horas e meia. A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

Editora Bernoulli **29**

Frente C Módulo 09

05. (Mackenzie-SP) Na figura, temos os esboços dos **08.** (UFF-RJ) A automedicação é considerada um risco,

gráficos das funções **f** e **g**, sendo $f(x) = ax$. O valor de **pois a** utilização desnecessária ou equivocada de um

$g(g(-1)) + f(g(3))$ é medicamento pode comprometer a saúde do usuário.

Substâncias ingeridas difundem-se pelos líquidos e tecidos **y** do corpo, exercendo efeito benéfico ou maléfico. Depois **4** de se administrar determinado medicamento a um grupo de indivíduos, verificou-se que a concentração **y** de certa

3

substância em seus organismos alterava-se em função do tempo decorrido **t**, de acordo com a expressão:

$$y = y_0 \cdot 2^{-0,5t}$$

O **1** x Em que y_0 é a concentração inicial e **t** é o tempo em

A) 3 hora. Nessas circunstâncias, pode-se afirmar que a **5** **1** B) 2 C) 3 D) E) concentração da substância tornou-se a quarta parte da **2** **2**

06. (CEFET-MG–2008) O conjunto imagem da função real 1 A) de hora. C) 1 hora. E) 4 horas. $f(x) = 2^{-3x^2 + 6x}$ é 4

1

A) $]-\infty, 3]$ B) hora. D) 2 horas.

2

B) $[0, 3]$

C) $\mathbb{R}_+$ o gráfico da função $y = 2^x$, os números **a**, **b**, **c** e suas * **09.** (UFRN) No plano cartesiano a seguir, estão representados

D) $[0, +\infty[$ imagens.

E) $]0, 8]$ y x

 $y = 2$

07. a (UFC) Suponha que um corpo, com temperatura positiva, 2 x 2 seja inserido em um meio cuja temperatura é mais a

2

baixa do que a do corpo. A tendência natural será a a 2

diminuição da temperatura do corpo. Newton, estudando 4

 $c \text{ O a b x}$

este fenômeno, descobriu que a temperatura **T** do corpo

Observando-se a figura, pode-se concluir que, em função decresce à medida que o tempo **t** passa, segundo a

de **a**, os valores de **b** e **c** são, respectivamente,

equação mostrada adiante:

$$T(t) = A + B \cdot e^{-kt}$$

2 4

Em que e é a base do logaritmo natural e A , B e k são B) $a - 1$ e $a + 2$ D) $a + 1$ e $a - 2$

constantes positivas. Assinale a alternativa na qual consta

o gráfico cartesiano que **MELHOR** representa, nesse

10. (UFPE –2007) O preço de um automóvel, $P(t)$, desvaloriza-se

fenômeno, a temperatura T em função do tempo t . em função do tempo t , dado em anos, de acordo com

uma função de tipo exponencial $P(t) = b \cdot a^t$, com a e b

A) T D) T sendo constantes reais. Se, hoje (quando $t = 0$), o preço

do automóvel é de R\$ 20 000,00, e valerá R\$ 16 000,00

daqui a 3 anos (quando $t = 3$), em quantos anos o preço

do automóvel será de R\$ 8 192,00?

O t O t 8 192 4

Dado:

=

0,8

20
000

B) T E) T

11. (UERJ) Em um município, após uma pesquisa de

opinião, constatou-se que o número de eleitores dos

candidatos A e B variava em função do tempo t , em anos,

O t O t de acordo com as seguintes funções:

$$A(t) = 2.105(1,6)^t$$

$$C) T_5 B(t) = 4.10(0,4)^t$$

Considere as estimativas corretas e que $t = 0$ refere-se ao dia 1 de janeiro de 2000. **DETERMINE** em quantos O meses os candidatos terão o mesmo número de eleitores. t

30 Coleção Estudo

Função exponencial

12. (PUC RS) Uma substância que se desintegra ao longo **18.**

(UERJ) A inflação anual de um país decresceu no período

do tempo tem sua quantidade existente, após t anos, de sete anos. Esse fenômeno pode ser representado por

$-t \times$ uma função exponencial do tipo $f(x) = a.b$, conforme o

dada por $M(t) = M_0 \cdot (1 - 0,04)^t$, em que M_0 representa gráfico a seguir:

a quantidade inicial. A porcentagem da quantidade

$$y = f(x)$$

existente após 1 000 anos em relação à quantidade inicial

M_0 é, aproximadamente, 960%

A) 14%. B) 28%. C) 40%. D) 56%. E) 71%.

13. (Mackenzie-SP) A função real definida por $f(x) = a.x^n$, $n \in \mathbb{Q}^*$, é tal que $f(f(x)) = 8x^4 7,5\%$. Então, o número real a vale $0,47$
 $x(\text{anos})$

A) B) 2 C) 4 D) E) **DETERMINE** a taxa de inflação desse país no quarto 1 1 1

4 8 2

ano de declínio.

14. (Unip-SP) O número de raízes reais da equação

$x^2 - 4x + 4 = 0$ é 2 **01.** (Enem-2009) A população mundial está ficando mais A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4 velha, os índices de

natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados (ITA-SP) Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ENEM 15. de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados (ITA-SP) Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

funções definidas por:

$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas x dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das

$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 3 \\ 3 & \text{se } x > 3 \end{cases}$ com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da

Considere as afirmações: coluna da direita representam as faixas percentuais.

I. Os gráficos de f e g não se interceptam. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com

60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre

II. As funções f e g são crescentes.

10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.

MATEMÁTICA

$$\text{III. } f(-2)g(-1) = f(-1)g(-2).$$

461

Então, 35

- A) apenas a afirmação I é falsa. Países desenvolvidos
- B) apenas a afirmação III é falsa. 30
- C) apenas as afirmações I e II são falsas. 269
- D) apenas as afirmações II e III são falsas. 25 1 592
- E) todas as afirmações são falsas. Número em milhões

20

16. (FGV-SP-2010) O valor de um carro decresce 95 15 exponencialmente, de modo que seu valor, daqui a 490

x anos, será dado por $V = A \cdot e^{-k \cdot x}$, em que $e = 2,7182\ldots$. Países em 10

desenvolvimento

Hoje, o carro vale R\$ 40 000,00 e daqui a 2 anos valerá

R\$ 30 000,00. Nessas condições, o valor do carro daqui 5

a 4 anos será 110 ESTIMATIVAS

A) R\$ 17 500,00. D) R\$ 25 000,00. 1950 0 70 90 2010 30 50

B) R\$ 20 000,00. E) R\$ 27 500,00. Disponível em: . Acesso em: 9 jul. 2009

C) R\$ 22 500,00. (Adaptação).

17. Suponha que o modelo exponencial $y = 363 \cdot e^{0,03 \cdot x}$, em que (Unicamp-SP) Suponha que o número de indivíduos

de uma determinada população seja dado pela função $x = 0$

corresponde ao ano 2000, $x = 1$ corresponde ao ano

$F(t) = a \cdot 2^{-b \cdot t}$ 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em , em que a variável t é dada em anos e a e

b são constantes. milhões de habitantes no ano x , seja usado para estimar

A) **ENCONTRE** as constantes a e b de modo que a população dessa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, inicial ($t = 0$) seja igual a 1 024 indivíduos e a população considerando $e_{0,3} = 1,35$, estima-se que a população com após 10 anos seja a metade da população inicial. 60 anos ou mais estará, em 2030, entre

B) Qual o tempo mínimo para que a população se reduza

A) 490 e 510 milhões. D) 810 e 860 milhões.

a da população inicial? B) 550 e 620 milhões. 1

8 E) 870 e 910 milhões.

C) **ESBOCE** o gráfico da função $F(t)$ para $t \in [0, 40]$. C) 780 e 800 milhões.

Editora Bernoulli **31**

Frente C Módulo 09

02. A pressão atmosférica P , em mmHg, é dada em função

da altura h (em relação ao nível do mar) pela expressão

GABARITO

$P(h) = 760 \cdot e^{\lambda \cdot h}$, sendo e o número neperiano, que vale

aproximadamente 2,7182. Um alpinista, ao escalar uma

Fixação

elevação, verificou através de um barômetro (instrumento

que mede a pressão atmosférica) que a pressão no 01. A 02. D 03. E 04. B 05. C

ponto em que se encontrava era
igual a 600 mmHg. Propostos

Considerando o parâmetro $\lambda = -0,0002$, pode-se afirmar

que a altura do alpinista, em relação ao nível do mar,

01.
E

é igual a

Dados: $e^{0,63} = 760$ e $e^{6,40} = 600$

A) 1 150 m. 03. B

B) 1 370 m.

04.
D

C) 1 520 m.

D) 2 240 m. 05. C

E) 3 000 m. 06. E

03. 07. E Sob certas condições, o número N de bactérias de

uma cultura, em função do tempo t , medido em horas, 08. E

é dado por $N(t) = N_0 \cdot 2^{t/12}$. Isso significa que, após 6 dias, o número inicial de bactérias terá sido multiplicado por

A) 2^{10} . 12 anos

B) 2^{11} . 6 meses

C) 16 . 12. E

D) 1 . 024

13.
B

E) 4 . 096

14.
C

04. A madeira foi um dos primeiros materiais usados pelo homem, na construção de sua habitação e de seus

16.
C

primeiros meios de transporte. Com a alta utilização

desse material, intensificaram-se o desmatamento e a perda de biodiversidade. 17. A) $a = 1$
024 e $b =$

10

significativa diminuição das florestas no mundo. A fim de reduzir essa perda, B) $t_{\text{(mínimo)}}$ =
30 anos

de solucionar esse problema, tende-se à produção de

madeira a partir de florestas plantadas ou regeneradas. C) $F(t)$

Para calcular o rendimento V de uma dessas florestas,

podemos usar a fórmula:

$$-481,512$$

$$V = 67e^t$$

Em que V nos dá o valor em metros cúbicos de madeira por are, em função da idade da floresta, t . Considerando 128

$e^{-0,481} = 0,62$, a quantidade de m^3 de madeira que renderá

O 10 20 30 40 t

uma floresta de 80 hectares com 100 anos de idade está entre 18. 60%

A) 10 000 e 20 000

B) 20 000 e 30 000

C) 30 000 e 40 000

D) 40 000 e 50 000 01. E 02. A 03. E 04. C

E) 50 000 e 60 000

Seção Enem

32 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Equações e inequações 10 C

exponenciais

EQUAÇÃO EXPONENCIAL 03. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $4^x - 2^x - 12 = 0$.

Uma equação é dita exponencial quando a variável
se *Resolução:*

apresenta no expoente. Seja a um número real tal que $2^{2x} - 2^x - 12 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$ $0 < a \neq 1$. Como a função exponencial é injetora, temos: Substituindo 2^x por y , temos:

$$y^2 - y - 12 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49$$

Se $y^2 - y - 12 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49$
 $= a_y$, então $x = y$.

$y = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow y = -3$ ou $y = 4$ Para $y = -3$, temos $2^x = -3$
(absurdo).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS Para $y = 4$,
temos $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$.

Portanto, $S = \{2\}$.

01. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $3^{2x} = 128$.

Resolução: **INEQUAÇÃO EXPONENCIAL**

$3^{2x} = 128 \Rightarrow (3^5)^x = 2^7 \Rightarrow 3^{5x} = 2^7 \Rightarrow$ é uma inequação exponencial. Toda desigualdade em que a variável

aparece no expoente

$$5^x = 7 \Rightarrow 7$$

$$x =$$

5 Exemplos

Portanto, $S = \{x \mid |3^x - 21| > 343 \wedge 3^x \geq 25\}$

$$. \mid \mid \geq -1 \ 5 \mid \mid \mid (5)$$

$$2^{\circ}) \ 3_x$$

$$-4 \leq$$

$$81$$

02. 82 De modo geral, uma inequação deve ser resolvida Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $3^x + 3^{-x} = 9$ colocando-se a mesma base **a** nos dois membros da

Resolução: inequação e considerando-se os seguintes casos:

Podemos escrever $3^x + 3^{-x} = 9$. **1.º caso: $a > 1$**

Substituindo 3 por y, temos:

x Como a função $f(x) = a_x$ é crescente, observamos que, se $a_{x_2} > a_{x_1}$, então $x > x_1$.

$$y + \frac{1}{y} = 9 \Rightarrow y + f(x) = a_x$$

$$(a > 1)$$

$$9y - 82y + 9 = 0 \Rightarrow \Delta_{2ax2} = (-82)_2 - 4.9.9 = 6\,400$$

a_{x1}

$$y = 8280 \pm 1 \Rightarrow y = \text{ou } y = 9\,1189$$

Para $y = 1$ O $x_1 \ x_2 \ x_x$, temos $3^1 = \Rightarrow 3_x = 3^{-2} \Rightarrow x = -2$.
9 9 Portanto:

Para $y = 9$, temos $3_x = 9 \Rightarrow 3_x = 3_2 \Rightarrow x = 2$.



Se $a > 1$, devemos **conservar** o sinal da desigualdade
ao compararmos os expoentes.

Portanto, $S = \{-2, 2\}$.

Editora Bernoulli **33**

Frente C Módulo 10

2º caso: $0 < a < 1$ EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Como a função $f(x) = a_x$ é decrescente,
observamos que, se $a_{x2} > a_{x1}$, então $x < x$. **01.**
(PUC Minas) Considere como verdadeiras as igualdades 2^1

$f(x) = a$ y $A_{x-y} = 2$ e $A_{3y} = 8$. Nessas condições, o valor

de A_{xx} é

($0 < a < 1$) A) 4 B) 6 C) 8 D) 10

a_{x2}

02. (UFMG) Suponha que a equação

$$182ax + bx + c = 43x + 525x - x + 8$$

a_{x1} seja válida para todo número real x , em que **a**, **b**, e **c**

x O x x são números reais. Então, a soma $a + b + c$ é igual a 21

Portanto: 5 17 28 A) B) C) D) 12 3 3 3

Se $0 < a < 1$, devemos **inverter** o sinal da

03. (UFSCar-SP) O par ordenado (x, y) , solução do sistema desigualdade ao compararmos os expoentes.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + y = 32 \end{array} \right\}, \text{ é } 3y - x$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

A) 5, C) 3, E) 1, || |||| |||| ||2 3 2 **04.** Resolver a inequação $7^x \leq 343$.

Resolução: , - D) 1, || B) 5 (3 \ (3 \ |||| ||2 2 \)
 $7^x \leq 343 \Rightarrow 7^x \leq 7^3$

Como $7 > 1$, devemos conservar a desigualdade, ou seja, **04.** (UNIRIO-RJ) O conjunto solução da inequação

$$x > 3. 2x \geq x + 3, \text{ em que } x > 0 \text{ e } x \neq 1, \text{ é}$$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

A) $]0, 1[\cup [3, +\infty[$ D) $\mathbb{R}$

05. Resolver a inequação $|x| \geq 25^{-1} \cdot 5^{3x-21}$ B) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ E) $\emptyset$ 1 \

C) $[3, +\infty[$

Resolução: 1 05. (UFJF-MG) A função $c(t) = 200 \cdot 3^{kt}$, com $k = \frac{1}{12}$, dá o $12^{3x-21} \cdot 3^{x-21} \cdot 3^{x-21} \cdot 2^{1-1} \cdot 1^{1-1} \cdot 1^{1-1} \mid | \geq 25^{-1} \Rightarrow | \geq \Rightarrow | \geq |$ crescimento do número **C**, de bactérias, no instante **t** 5 \ 5 25 \ 5 \ 5 em horas. O tempo necessário, em horas, para que haja,

Como $0 < 1$ nessa cultura, 1 800 bactérias, está no intervalo < 1 , devemos inverter a desigualdade, 5 A) $[0, 4]$ D) $[36, 72]$

ou seja, $3x - 21 \leq 23 \Rightarrow 3x \leq 23 \Rightarrow x \leq \frac{23}{3}$. B) $[4, 12]$ E) $[72, 108]$

3

$\{ 23 \} \mid \leq$ C) $[12, 36]$

Portanto, $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{23}{3} \}$.

$\{ 3 \}$

06. Resolver a inequação $2x + 2 - 2x - 1 + 2x \leq 18$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Resolução: 01. (UEL-PR) Considere as soluções reais de $3a \cdot 37x \cdot 312 = 1$.

Nesse caso, devemos utilizar as propriedades das Se $a = x^2$, então a diferença entre a maior e a menor

potências. dessas raízes é

$2x \cdot 2^2 - + 2x \leq 2x \cdot 2x \cdot 18 \Rightarrow 4 \cdot 2x - + 2x$ A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0
 $\leq 18 \cdot 2 \cdot 2$

Substituindo $2x$ (UNIRIO-RJ) Assinale o conjunto-solução da inequação **02.** por y , temos:

$4y - \mid \mid \mid + y \leq 18 \Rightarrow \leq 18 \Rightarrow 9y \leq 36 \Rightarrow y \leq 4$ 2 4 2 y
 $10y y - \leq \left(x-3 \mid 1 \right) 1 \mid 2 \setminus \setminus$

Substituindo y por $2x$, obtemos: A) $]-\infty, 5]$ D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$

$2x \leq 4 \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 2$ B) $[4, +\infty[$ E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$. C) $[5, +\infty[$

34 Coleção Estudo

Equações e inequações exponenciais

03. (UFMG) O produto das raízes da equação $3x^2 + 4x + 3 = 0$ é **10**.

(UFPE) Quantas soluções reais possui a equação $x^3 + 3x^2 - 10x + 10 = 0$?

$$1 \text{ 2 10 4 3 - 10 = 0? } x + 1$$

A) -3 C) - E) 3 3 A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 10

1

B) - D) 1

4 11. (FGV-SP) Uma instituição financeira oferece um tipo de

04. aplicação tal que, após t meses, o montante relativo

(UFOP-MG) O valor de x que satisfaz a equação seguinte $0,04.t$

ao capital aplicado é dado por $M(t) = C \cdot 2^t$, em que

é um número

$x \cdot C > 0$. O menor tempo **POSSÍVEL** para quadruplicar uma

$$4 - 15.2 - 16 = 0$$

A) certa quantia aplicada nesse tipo de aplicação é ímpar. D) primo.

B) A) 5 meses. irracional. E) par.

C) negativo. B) 2 anos e 6 meses.

C) 4 anos e 2 meses.

05. ₁ (Fatec-SP) Seja $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, em que $f(x) = 2x$ D) 6 anos e 4 meses. . O conjunto

E) 8 anos e 5 meses.

1

dos valores de x para os quais $f(x) < 6$ é

8 12. (PUC Minas) O valor de x que satisfaz a equação

A) $]3, 8[$ D) $\mathbb{R} - \{0, 8\}$ $3^{3x-1} \cdot 9^{2x+3} = 27^{3-x}$ é

B) $]1, 5[$ $]1, 5[$ $2 \in]0, 1[$, $0 \in]1, 2[$, E) $]1, 2[$ A) 1 C) 3 D) 5

C) $]-\infty, 3[$ 1 B) 3 D) 3 **06.** (UEL-PR) A relação a seguir descreve o crescimento de

uma população de micro-organismos, sendo P o número **13.** (UFV-MG) Seja a equação $[12x-3]_{x-2} = 1$. A soma e

de micro-organismos, t dias após o instante 0. O valor o produto de suas soluções são, respectivamente,

de P é superior a 63 000 se, e somente se, t satisfizer à os números **MATEMÁTICA**

condição A) 3 e 2 D) -2 e -8

$P = 64\,000 \cdot (1 - 2^{-0,1 \cdot t})$ B) 9 e 8 E) 5 e 6

A) $2 < t < 16$ C) -5 e -24 D) $t > 60$

B) $t > 16$ E) $32 < t < 64$

C) $t < 30$ **14.** (Cesgranrio) Se o quociente de $64x^{-1}$ por $4x^{-1}$ é 256^{2x} ,

07. (UFV-MG) Seja a função real $f(x) = ax$, $a > 1$. O conjunto 2 então x é dos valores de x para os quais $f(x) - 2 \leq 1$ 1 3 B) - C) 0 D) E) $-3) > f(6)$ é 3 3 4 8 $\in A)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ **15.** (FGV-SP) A raiz da equação $2x^{-1} + 2x + 1 + 2x = 7$ é

C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$ A) um número primo.

D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$ B) um número negativo.

E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3\}$ C) um número irracional.

D) um número maior ou igual a 1.

08. (FGV-SP) Seja a função f , de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por E) um múltiplo de 5.

$f(x) = 5 \left(a \right)^{3x}$. Se $f(a) = 8$, então $f \left(\frac{1}{a} \right) - \left(\frac{1}{a} \right)^3$ é 3 $\left(\frac{1}{a} \right)^3$

16. (PUC RS) Se $3x - 3^{2-x} = 23$, então $15 - x^2$ vale

A) 1 1 1 B) C) D) 4 E) 2 A) 16 B) 15 C) 14 D) 11 E) 6

2 4 8

17. (UFV-MG-2008) Faça o que se pede.

09. (Mackenzie-SP-2010) O valor de x na equação

$\left| f(x) = 3^{-x} \right|$ é $\left| 9 \right|^{27}$ $\left(\frac{1}{3} \right)^{27}$ B) **ENCONTRE** o conjunto solução da inequação $\left(\frac{1}{3} \right)^{2x-2} \geq 1$ A) **ESBOCE** o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

- B) $2 \left(\frac{1}{x} \right)^{x+1}$ negativo. A) tal que $2 < x < 3$. D) múltiplo de 2. $2x - x$
 C) tal que $0 < x < 1$. E) 3. $3x - x \leq$ em $\square$. $|| \quad || 3 \quad ()$

Editora Bernoulli **35**

Frente C Módulo 10

18. (UFV-MG–2009) Para resolver a equação exponencial **02.** Uma garrafa de cerveja foi colocada em uma geladeira que

$4_{2x-2} - 24.4_{x-2} + 8 = 0$, Aline tomou o cuidado de tinha temperatura interna igual a 5°C . A temperatura da

inicialmente multiplicar ambos os membros da equação garrafa em função do tempo pode ser descrita pela função:

por 16. Tendo resolvido **CORRETAMENTE**, Aline

–t

encontrou dois números reais cujo produto vale $T(t) = T_a + B.3_{2a}$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2

Em que T_a é a temperatura do ambiente, em graus Celsius,

19. e **B** é uma constante. Sabe-se que, após 2 horas, a (UFLA-MG) O valor de x que satisfaz a equação

2 cerveja chegou a 14°C . Quanto tempo levou para que $x+3 + 2_{x-3} = 260$ é

essa garrafa atingisse a temperatura de 6°C ?

A) 5 B) 8 C) 3 D) 2 E) 1

SEÇÃO ENEM_{B)} 3 horas

C)
4
horas

01. D) 5 horas A fotografia a seguir mostra o famoso monumento conhecido como Gateway Arch. E) 6 horas



Fixação

01. A 02. C 03. D 04. A 05. C

Propos

01. D 09. D 02. C 10. C 03. B 11. C 04. E 12. E

e Commons 05. E 13. E

06. D 14. B

Bupholff / Creativ 07. D 15.
D

08. A 16. D

Localizado em St. Louis, Missouri, o Gateway Arch foi

17. A) y

projetado pelo arquiteto Eero Saarinen. Embora lembre
uma parábola, o monumento tem a forma exata de
uma curva conhecida como catenária, nesse caso, 3
no formato invertido. A catenária é uma curva formada
por um fio pendente, e sua expressão é dada por

1

dos parâmetros físicos do fio, e e é o número neperiano. $y = e^{-ax} - 1$
+ e , em que a é uma constante que depende $= 3/2 a - 1$ O $1/x$

Se $a = 1$, o valor de x para o qual $y = 1$ é B) $-1 < x \leq 1$

18.
C

A) -2

19.

A

B) -1

C) 0 **Seção Enem**

D) 1

01. C 02. E

E) 2

36 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Áreas de polígonos

09 D

ÁREA DE ALGUMAS FIGURAS

Triângulo

PLANAS Consideremos um triângulo ABC, cuja base AB mede **b** e a altura relativa a essa base mede **h**. Traçando por **C** a

Retângulo reta **r** paralela à base, e por **B** a reta **s** paralela ao lado AC,

obtemos o paralelogramo ABDC a seguir:

s

A área A de um retângulo é o produto da medida da base c

pela medida da altura. $D r$

h

$h A B b$

b Como o triângulo BCD é congruente ao triângulo ABC e a

área A do triângulo ABC é metade da área do paralelogramo,



então,
temos:

$$A = b \cdot h$$

$b h .$

$A =$

2

Quadrado Ou seja, a área do triângulo é metade do produto da medida

O quadrado é um retângulo de lados iguais. Logo, sua área A da base pela medida da altura.

é o produto da medida da base pela medida da altura.

Triângulo equilátero

a Pelo Teorema de Pitágoras, calcula-se facilmente a medida h

da altura de um triângulo equilátero de lado a , obtendo:

a



$$A = a \cdot h$$

Paralelogramo

A área de um paralelogramo de base b e altura h é igual

à área de um retângulo de base b e altura h . Observe:

$$A = b \cdot h$$

Logo, a área A desse triângulo é:

$$A = \frac{1}{2} b \cdot h$$

$$A = 231 \Rightarrow A = . \Rightarrow 2 \square_2 \square . \square 3$$

$$b \ 2 \ 2 \ b$$

$$\square_2 3$$



$$A =$$



$$A = b.h \ 4$$



Editora Bernoulli 37



Frente D Módulo 09

Hexágono regular Observe, portanto, que a área A do losango é o dobro da área do triângulo de base d e altura $\frac{D}{2}$. As diagonais de um hexágono regular dividem-no em seis

triângulos equiláteros. Assim, a área A de um hexágono regular de lado ℓ é igual à seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado ℓ .

Q N D

P

d

$A = 6 \cdot \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \ell^2$ Portanto, a área A do losango é metade do produto das



medidas
das
diagonais.

Trapézio OBSERVAÇÃO

Traçando uma diagonal de um trapézio de altura h e bases b_1 e b_2 , o losango também é paralelogramo. Logo, sua área pode

b e **B**, dividimo-lo em dois triângulos de altura **h** e bases de ser calculada como a área de um paralelogramo. medidas **b** e **B**. Observe a figura.

b EXPRESSÕES DA ÁREA DE

UM
TRIÂNG

h Em função das medidas dos lados

—

Teorema
de
Herão

Dado um triângulo ABC, com lados de medidas **a**, **b** e **c**,

$B a b c + +$ sendo o semiperímetro $p = , 2$

A área **A** do trapézio é a soma das áreas desses dois
A

triângulos. Assim, temos: $c \leq b$

$B \leq A \leq C$



$A = \frac{B + b}{2} \cdot h$. temos que a área do triângulo ABC é: $\Rightarrow A = \frac{B + b}{2} \cdot h$



$$A = \frac{p \cdot a \cdot p \cdot b \cdot p \cdot c}{2} \cdot (-) \cdot (-) \cdot (-)$$



Portanto, a área A do trapézio é igual à metade do produto

da altura pela soma das bases. Em função do semiperímetro e do

raio da circunferência inscrita

Losango Dado um triângulo ABC, com lados de medidas **a**, **b** e **c**,

com semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$, e a circunferência inscrita

Consideremos um losango cujas diagonais medem $2r$

D e d. Sabemos que as diagonais de um losango são de raio **r**, então a área do triângulo ABC é:
perpendiculares entre si e o ponto em que elas concorrem



é o ponto médio de cada uma. $A = p \cdot r$

38 Coleção Estudo

Áreas de polígonos

Demonstração: Demonstração:

$$A_1 = A \cdot \sin A_\Delta$$

$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \cos B \quad \left| \cdot r \right| \quad A_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A \Rightarrow \Delta_{ABC} C = \frac{1}{2} a^2 \sin A = \frac{1}{2} 4R^2 \sin A = 2R^2 \sin A$$

$$B = 2R \sin A \quad \left| \cdot a \right|$$

$$A = A_{ABC} + A_{BCO} + A_{ACO} + A_{ABO} \Rightarrow$$

$A = \frac{1}{2} a b \sin C$

ÁREAS DE POLÍGONOS

$$A_{\text{polígono}} = \frac{1}{2} p \cdot a$$

REGULARES

$A_{\text{polígono}} = \frac{1}{2} p \cdot a$

Considere um polígono regular A_n com n lados, de n lados

2

Em função da medida de dois de
 medida a e semiperímetro $p = \frac{1}{2} p$, inscrito em uma
 circunferência de centro O e raio R . O polígono pode
 ser

lados e do ângulo compreendido
 dividido em n triângulos isósceles congruentes.

entre eles

Dado um triângulo ABC , com lados de medidas a , b
 e

temos que a área desse triângulo é: $A = \frac{1}{2} a b \sin C$ e ângulo de

medida $\hat{A}$, compreendido pelos lados $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, $R R$

R_4



R

Demonstração: $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$ ou $R^2 \sin A_n A$

MATEMÁTICA₅

C

A_6

$b a h$

Traça-se, em um dos triângulos, o apótema a do polígono.

A

$A B c O$

$$\left. \begin{array}{l} \sin h \mid b c \cdot \sin A \\ \mid 2 c h \cdot \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta_{ABC} = \frac{1}{2} b c \sin A \mid A \Delta_{ABC} =$$

$$= \Rightarrow = h b \sin A \mid b \mid R R$$

Em função das medidas dos lados e
do raio da circunferência

circunscrita

Dado um triângulo ABC, com lados de medidas **a**, **b** e **c**, $A_2 A_1$

inscrito em uma circunferência de raio **R**.

c A área $A_{\square}$ desse triângulo é dada por $A_T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$

b a O Como o polígono possui **n** triângulos, então sua área

A área do triângulo ABC inscrito na circunferência é:
 $A_A A$ é dada por: $p_B c R \sin A$
 $p_T \Rightarrow p \Rightarrow = p \Rightarrow 2 \cdot 2$



$$A = A_P = p \cdot a \cdot 4 \cdot ab \cdot c \dots$$



R

Frente D Módulo 09

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS Substituindo os pontos A, B, C e D em um mesmo sistema de coordenadas, temos:

01. (UNIFESP–2007) Dois triângulos congruentes ABC e ABD, y de ângulos 30° , 60° e 90° , estão colocados como mostra C 1 a figura, com as hipotenusas AB coincidentes.

D C 1 D

A B

A O x π π B 6 2

Se $AB = 12$ cm, a área comum aos dois triângulos, em Logo, temos um trapézio retângulo cuja área vale:

centímetros quadrados, é igual a

A) 6 B) 4 C) 6 D) 12 E) 12 $\sqrt{3}$ π 1 + || - |
 . | 2 || 2 6 | π () () 2 3 A = $\Rightarrow$ A = $\Rightarrow$ A = **Resolução:** 2 2 4

Dados $AB = 12$ cm e os ângulos internos dos triângulos

ABC e ABD, determinamos as medidas dos outros lados.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

6 01. (FUVEST-SP–2007) A figura representa um retângulo ¹³

ABCD, com $AB = 5$ e $AD = 3$. O ponto E está no segmento

D 2¹³ C CD, de maneira que CE = 1, e F é o ponto de interseção

60° da diagonal AC com o segmento BE.

60° 6

30° E D E C 30°

A 30° 30° B 12

sen 30 BC F 1 BC ° = ⇒ = ⇒ BC = 6 cm AB 2 12

cos 30 = ⇒ = ⇒ AC = 6 3 cm

° AC AC 3 A B

AB 2 12

tg 30 ⇒ = ⇒ CE = cm ° CE 3 CE Então, a área do triângulo BCF
vale = 2 3 6 BC 3 6 A) 5

02. Portanto, a área, em cm², do triângulo ABE vale: 5

B) 4 6 6 3 . 6 2 3 . A = A – A A = – Δ ABE Δ ABC Δ BEC ⇒ Δ

ABE ⇒ 4 2 2 C) 3 A = 12 √ Δ ABE 3 7 D) 5 (UFV-MG–2009) Seja f a

função definida por f(x) = sen x, 3 E) x ≥ 0. Num mesmo sistema de
coordenadas, considere 2

os pontos (π) (π) A , 0 , B , 0 , C e D, em que C e
D estão || |||| || 6 2 **02.** (UFRGS) Os quadrados ABCD e
APQR, representados () ()

sobre o gráfico de f, cujas abscissas são, respectivamente, na figura
a seguir, são tais que seus lados medem 6 e o

2 π π $\hat{P}$ AD mede 30° . e . Unindo-se esses pontos obtém-se o quadrilátero 6 B R

ABCD, cuja área vale A

A) π π π π B) C) D) 4 2 5 3

Resolução:

Temos os pontos $(C, Q, \pi) \mid (\pi) \mid A, 0$ e $B, 0 \mid \mid \mid \mid \mid \mid D, P, 6, 2 \mid \mid \mid \mid$

Como os pontos **C** e **D** pertencem ao gráfico de $f(x) = \sin x$,
Ligando-se o ponto **B** com o ponto **R** e o ponto **D** com

temos: $(\pi \pi) \mid (\pi 1) \mid \pi \pi \mid (\pi) \mid$ o ponto **P**, obtém-se o hexágono
BCDPQR, cuja área é $C \mid \mid$, $\sin \mid \Rightarrow C \mid \mid$, $1 \mid \mid$ e $D \mid \mid$, $\sin \mid \Rightarrow D \mid \mid$, $\mid \mid$
2 2 2 6 6 6 2 $\mid \mid \mid \mid \mid \mid$ A) 90 B) 95 C) 100 D) 105 E) 110

40 Coleção Estudo

Áreas de polígonos

03. (FUVEST-SP-2008) No retângulo ABCD da figura tem-se

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

$CD = \square$ e $AD = 2\square$. Além disso, o ponto **E** pertence à

diagonal BD, o ponto **F** pertence ao lado BC e EF é

01. (UFMG) Observe a figura.

perpendicular a BD. Sabendo que a área do retângulo

ABCD é cinco vezes a área do triângulo BEF, então BF mede A

E

B F C

F

E B C

A 1 2 D BC é a hipotenusa do triângulo retângulo ABC, $AE = AB$, 4

A) 2 $FC = \frac{1}{2} AC$ e a área do quadrilátero BCFE é igual a 30 cm. 4 ☐
8 A área do triângulo AEF é igual a

B) 2 80 A) ☐ 10 D) 4 13

2 B) 90 20 E)

C) ☐ 13

2

2 C) 60

D) 13 3 ☐ 4

E) ☐ **02.** (UFG–2007) No trapézio ABCD a seguir, o segmento $\frac{1}{2}AB$

mede **a**, o segmento DC mede **b**, **M** é o ponto médio de

04. AD e **N** é o ponto médio de BC. (UFMG–2008) O octógono regular de vértices ABCDEFGH,

cujos lados medem 1 dm cada um, está inscrito no quadrado b D C

MATEMÁTICA

de vértices PQRS, conforme mostrado nesta figura.

M N

S F E R

A a B

G D

Nestas condições, a razão entre as áreas dos trapézios

MNCD e ABNM é igual a

H C

P A) $a + 2b$ a + 2b D) $3a + 2a + b + Q$ A B

Então, é **CORRETO** afirmar que a área do quadrado B) $a + 3b$ $3a + 2b$ E) $2a + b + 2a + 3b$

PQRS é

A) $1 + 2a + 3b$ dm^2 . C) $3 + 2$ dm^2 . C) $3a + b + B$ $1 + 12$ dm^2 . D) $3 + 12$ dm^2 .

03. (FUVEST-SP) No quadrilátero ABCD a seguir, $\angle ABC = 150^\circ$,

05. (PUC Minas) Pelos dados da figura a seguir, a medida da $AD = AB = 4$ cm, $BC = 10$ cm, $MN = 2$ cm, sendo **M** e **N**,

área do triângulo de vértices **C**, **D** e **E**, em m^2 , é respectivamente, os pontos médios de CD e BC .

A medida, em cm^2 , da área do triângulo BCD é

C

M C

D

A B E A) 10 D) 30

Dados: $BE = 2AE = 4 \text{ m}$; $AD = AE$; $BC = BE$ B) 15 E) 40

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9 C) 20

Editora Bernoulli 41

Frente D Módulo 09

04. (UFES) No triângulo ABC da figura, temos **09.**(UFMG) Nos triângulos ABC e DEF, $AB = DE = c$,

$AD = CF = BE = 2 \text{ cm}$ e $DC = FB = EA = \sqrt{1 + 3} \text{ cm}$. $AC = DF = b$, $\angle BAC = a$, $\angle EDF = 2a$, e a área do triângulo

CALCULE a medida, em graus, do ângulo $\widehat{AED}$ e a área ABC é o dobro da área do triângulo DEF. **CALCULE** o

do triângulo DEF. valor de $\cos a$.

A

10. (UFMG) Observe esta figura.

A B

D

E

B F C

05. (UFRJ) Na figura a seguir, o quadrado ABCD tem lado 6.

$Q_1 D Q C$, Q_2 , Q_3 e Q_4

são quadrados de lado x . A região

hachurada tem área 16. **DETERMINE x .** Nessa figura, o quadrado ABCD tem área igual a 1;

o triângulo BPQ é equilátero; e os pontos P e Q

A D Q pertencem, respectivamente, aos lados AD e CD. Assim, Q

1 2 X

a área do triângulo BCQ é

$6 \cdot 3 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - 3$ A) B) C) D) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Q Q 43 **11.** (FUVEST-SP) Na figura a seguir, a reta r é paralela ao

B C segmento AC, sendo E o ponto de interseção de r com a

reta determinada por D e C. Se as áreas dos triângulos

06. (UFMG) Observe a figura. ACE e ADC são 4 e 10, respectivamente, e a área do

A B quadrilátero ABED é 21, então a área do triângulo BCE é

r

A) 6 E r

E F G s B) 7 B

D C t E) 10 A D

Nessa figura, as retas **r**, **s**, e **t** são paralelas; a distância

entre **r** e **s** é 1; a distância entre **s** e **t** é 3; $EF = 2$ e $FG = 5$. **12.** (UFU-MG-2007) Na figura a seguir, a área do triângulo

CALCULE a área do quadrilátero ABCD. ADE corresponde a 20% da área do quadrado ABCD. Para

que a área do triângulo EBC seja igual a 30 cm^2 , o lado

07. (UFMG) O comprimento de uma mesa retangular é o dobro do quadrado ABCD deve ser igual a

de sua largura. Se a mesa tivesse 45 cm a menos de A B

comprimento e 45 cm a mais de largura, seria quadrada.

Assim, a área da mesa é de

A) $1,62 \text{ m}^2$. C) $1,58 \text{ m}^2$.

B) $1,45 \text{ m}^2$. D) $1,82 \text{ m}^2$.

D E C

08. (UFMG) Observe a figura. A) 10 cm. B) $10\sqrt{2}$ cm. C) $5\sqrt{3}$ cm. D) 5 cm.

D C

13. (UFJF-MG-2008) A área do hexágono regular ABCDEF é

180
 cm^2 .

A

E F

F

B

A B E

C

Na figura, ABCD é um quadrado de lado 1, $EF = FC = FB$

$$e DE = 1 D$$

2 Qual é a área do triângulo sombreado, em centímetros
 . A área do triângulo BCF é

A) 3 quadrados? 1 1 3 B) C) D) 16 5 6 4 A) 10 B) 15 C) 20
 D) 25 E) 30

42 Coleção Estudo

Áreas de polígonos

14. (Mackenzie-SP-2006) A figura a seguir representa as **02.**
 (Enem-2002) Um terreno com o formato mostrado na

peças do tangram – quebra-cabeça chinês formado por figura foi
 herdado por quatro irmãos e deverá ser dividido

5 triângulos, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Sendo a área em quatro
 lotes de mesma área. 2 do quadrado ABCD igual a 4 cm , a área do
 triângulo

sombreado, em cm^2 , é

A D Rua A

Rua C

Terreno

Rua D

1 1 1

A) C) E) As ruas **A** e **B** são paralelas.

6 9 4 As ruas **C** e **D** são paralelas.

B) D) Um dos irmãos fez algumas propostas de divisão para que 1
1

8 2

fossem analisadas pelos demais herdeiros. Dos esquemas

15. (FUVEST-SP-2009) A figura representa sete hexágonos a seguir, em que lados de mesma medida têm símbolos

regulares de lado 1 e um hexágono maior, cujos vértices iguais, o único em que os quatro lotes não possuem,

coincidem com os centros de seis dos hexágonos necessariamente, a mesma área é:

menores. Então, a área do pentágono hachurado é igual a

A) D)

B) E)

MATEMÁTICA

A) 3 3 3 3 C) 3 C) E) 2 2

B) 2 3 D) 3

SEÇÃO ENEM 03. (Enem–2008) O tangram é um jogo oriental antigo, uma

espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças:

01. (Enem–2000) Em uma empresa, existe um galpão que é 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo

precisa ser dividido em três depósitos e um *hall* de entrada de 20 m , conforme a figura a seguir. Os depósitos I, 2 um quadrado de acordo com o esquema da figura 1.

II e III serão construídos para o armazenamento de, Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar

respectivamente, 90, 60 e 120 fardos de igual volume, uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas

e suas áreas devem ser proporcionais a essas capacidades. nas figuras 2 e 3.

B

Hall

20 m A 2

10 m

I II III

Figura 1 Figura 2 Figura 3

11 m

Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede

A largura do depósito III dever ser, em metros, igual a 2 cm, então a

área da figura 3, que representa uma

A) 1 D) 4 “casinha”, é igual a

B) 2 E) 5 A) 4 cm². C) 12 cm². E) 16 cm².

C) 3 B) 8 cm². D) 14 cm².

Editora Bernoulli 43

Frente D Módulo 09

04. (Enem–2009) O governo cedeu terrenos para que famílias **06.**

(Enem–2009) Um fazendeiro doa, como incentivo, uma

construíssem suas residências com a condição de que área retangular de sua fazenda para seu filho, que está

no mínimo 94% da área do terreno fosse mantida como indicada na figura como 100% cultivada. De acordo com

área de preservação ambiental. Ao receber o terreno as leis, deve-se ter uma reserva legal de 20% de sua

retangular ABCD, em que $AB = BC$ área total. Assim, o pai resolve doar mais uma parte para , Antônio demarcou compor a reserva para o filho, conforme a figura. 2 uma área quadrada no vértice A, para a construção a x

de sua residência, de acordo com o desenho, no qual

$AE = AB$ Área 100% é lado do quadrado. b 5 cultivada (filho) x B C

Área
de
reserva

A E D De acordo com a figura anterior, o novo terreno do filho

Nesse caso, a área definida por Antônio atingiria cumpre a lei, após acrescentar uma faixa de largura

exatamente o limite determinado pela condição se ele x metros contornando o terreno cultivado, que se

A) duplicasse a medida do lado do quadrado. destinará à reserva legal (filho). O dobro da largura x

da
faixa
é

B) triplicasse a medida do lado do quadrado.

C) triplicasse a área do quadrado. A) $10\%(a + b)_2$

D) ampliase a medida do lado do quadrado em 4%. B) $10\%(ab)_2$

E) ampliase a área do quadrado em 4%. C) $^1a + b - (a + b)$

D) $^1(a + b)_2 + ab - (a + b)$

05. (Enem–2009) A vazão do Rio Tietê, em São Paulo,

E) $^1(a + b)_2 + ab + (a + b)$

constitui preocupação constante nos períodos chuvosos.

Em alguns trechos, são construídas canaletas para

controlar o fluxo de água. Uma dessas canaletas, cujo

GABARITO

corte vertical determina a forma de um trapézio isósceles, Fixação tem as medidas especificadas na figura I. Neste caso,

a vazão da água é de 1 050 m³/s. O cálculo da vazão, 01. B 02. A 03. E 04. C 05. D

Q em m³/s, envolve o produto da área A do setor Propostos transversal (por onde passa a água), em m², pela

velocidade da água no local, v, em m/s, ou seja, $Q = Av$. 01. E 08. A

Planeja-se uma reforma na canaleta, com as dimensões 1 02. C 09. especificadas na figura II, para evitar a ocorrência de 4

enchentes. 03. C 10. C

Figura I

30 m 04. $\hat{A}ED = 45^\circ$ 11. B

2,5 m Área = 3 3 2 cm 12. A

2

20 m 05. $x = 1$ ou $x = 2$ 13. A

88

06. 14. E

Figura II 49 m 07. 3 A 15. E

41 m

Disponível em: . 01. D

Na suposição de que a velocidade da água não se 02. E
alterará, qual a vazão esperada para depois da reforma 03. B
na canaleta? 04. C

A) 90 m³/s D) 1 512 m³ /s 05. D

B) 750 m³/s E) 2 009 m³/s 06. D

C) 1 050 m³/s

44 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Áreas de círculo e suas partes 10 D

ÁREA DE UM CÍRCULO Área de um setor circular

Considere a circunferência A área de um setor circular de raio R é proporcional λ de centro O e raio R .

à medida do arco correspondente.

Inscriva em λ polígonos regulares, de modo que o

número

de lados cresça sucessivamente. **1º caso:**

A^2B medido em graus.

a

R

$O R R B O O \alpha^\circ$

$\lambda \lambda R A$

R Área Arco a R

$R p R_2 \text{-----} 360^\circ$

$O O A \text{-----} a^\circ$

do seu semiperímetro p pelo apótema a : A Sabemos que a área de um polígono regular P é o produto $\lambda \lambda_2$
 $\pi R_2 360^\circ \pi R \alpha^\circ A$ Logo, $= \Rightarrow = A \alpha^\circ 360^\circ = p \cdot a_p$

Quanto maior o número de lados do polígono regular **2º caso:**

inscrito em λ , mais seu perímetro se aproxima do perímetro A^2B medido em radianos. (comprimento) da circunferência, e seu apótema se

aproxima do raio. A área do polígono torna-se, portanto,

cada vez mais próxima da área do círculo de raio R . R
 B

Afirma-se, então, que a área de um círculo é o produto $R \cdot A$ $O \beta \text{ rad}$

do seu semiperímetro pelo raio.

Assim, para o círculo de raio R , tem-se: **Área Arco**

$$\frac{pR_2}{R} \frac{2p \text{ rad}}{b \text{ rad}}$$

$$\frac{O \pi_2 R}{2 \lambda} \frac{2\pi_2 R}{\text{Logo,}} = \Rightarrow A = \beta A \beta$$

3º caso:



$$A = pR.R \Rightarrow A = pR_2 A^2B \text{ medido em comprimento.}$$



SETOR CIRCULAR $R B O R A$ Setor circular é uma parte do círculo limitada por um arco de circunferência e dois raios com extremidades nas



extremidades do arco. **Área Arco**

$$pR_2 \text{ ----- } 2pR \text{ A ----- } \square$$

R B



$$\begin{aligned} O_2 R \pi 2\pi R \square R R \text{ Logo, } = \Rightarrow A = A \\ A \square 2 \end{aligned}$$

Editora Bernoulli **45**

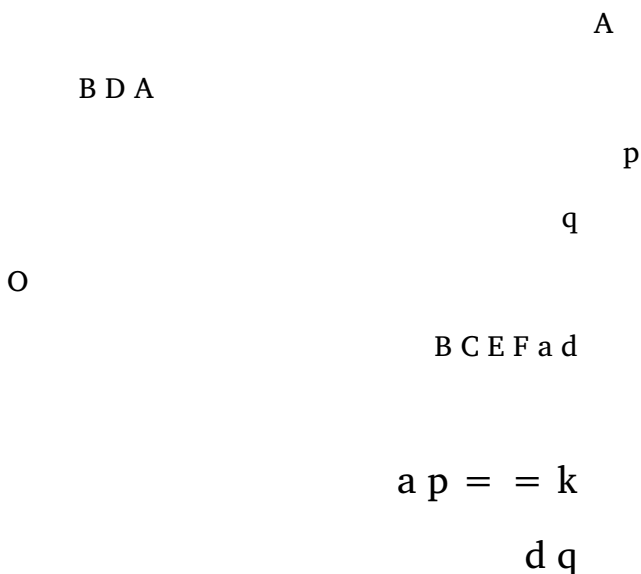
Frente D Módulo 10

SEGMENTO CIRCULAR RAZÃO ENTRE ÁREAS DE

Segmento circular é uma parte do círculo limitada
por um **FIGURAS SEMELHANTES**

arco de circunferência e por uma corda com extremidades Consideremos os triângulos semelhantes ABC e DEF, sendo K

nas extremidades do arco. a razão de semelhança do primeiro para o segundo.



mostrado na figura anterior. A corda AB determina dois segmentos circulares, como Calculando a razão da área do primeiro para a área do segundo triângulo, temos:

$$\begin{aligned} \text{Área de um segmento circular} &= \frac{A_{\Delta ABC}}{a p^2} = \frac{A_{\Delta DEF}}{d q^2} = k \cdot k = k^2 \Rightarrow \\ &= \frac{A_{\Delta DEF}}{d q^2} \end{aligned}$$

Para calcularmos a área de um segmento circular de

ângulo central $0 < \alpha \leq \pi$, procedemos como
mostrado na

figura seguinte: $A_{\Delta ABC} = k^2 A_{\Delta DEF}$

$\frac{B}{A} = \frac{B}{A} = \frac{B}{A} = \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha}$

$R = R = R = R = R = R = -$ Dessa maneira, deduzimos uma
importante propriedade: $\frac{O}{O} = \frac{O}{O} = \frac{O}{O}$

A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes
é
igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.

$A = A \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot R = A = R \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{2}$ Essa
propriedade pode ser generalizada para
qualquer $\alpha \Rightarrow 2$ figuras semelhantes, isto é:



$A = (\alpha - \text{sen } \alpha) A$ A razão entre áreas de duas figuras semelhantes é
igual R^2

2

ao quadrado da razão de semelhança entre essas figuras.

COROA CIRCULAR

Dadas duas circunferências concêntricas de raios r e R , **EXERCÍCIO RESOLVIDO**

com $r < R$, chama-se coroa circular ao conjunto dos pontos **01.** (AFA-SP) Na figura a seguir, o lado do quadrado é 1 cm. pertencentes ao círculo de raio R e exteriores ao círculo $_2$ Então, a área da região hachurada, em cm, é de raio r .

r R
O

Para calcularmos a área de uma coroa circular, fazemos a

diferença entre as áreas dos dois círculos: $\pi R^2 - \pi r^2 = A$) C)
- 4 2 4 4



$$A = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow A = \pi(R^2 - r^2) \quad \pi 1 \pi 1 \text{ B) } - \text{ D) } - 2 2$$

2 4



46 Coleção Estudo



Áreas de círculo e suas partes

Resolução: 04. (UFV-MG–2008) A região hachurada da figura 1 a seguir

A área hachurada corresponde à quatro vezes a área de é denominada Triângulo de Reuleaux, em homenagem a

um segmento circular de ângulo central 90° 1 Franz Reuleaux (1829-1905). Nesse triângulo, os vértices A , B e C são centros de circunferências de raio r , as quais 2 indicado na figura. contêm, respectivamente, os arcos B^1C , A^1C , A^1B , conforme

1 ilustrado. A janela da Catedral de Notre Dame (figura 2)

2 em Bruxelas, na Bélgica, tem seu *design* inspirado no

Triângulo de Reuleaux.



2

C

$$\text{Assim, } A \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \pi \\ \pi \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right) = 4(A_{\text{hac. setor}} - A_{\Delta}) \Rightarrow A_{\text{hac.}} = 4. \Rightarrow - \left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right)$$

A $(\pi_1)_2 = \text{hac.}$ – cm Figura 1 Figura 2 || || 4 2 \) Para a construção dessa janela é necessário conhecer

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Triângulo de Reuleaux, em função do raio r ,

que é dada por

01. $\pi + 3\pi - 5$ (UFMG) Observe a figura. r_2 2 A) C) r_2 2 C₁ C

C B) $\pi - 3_2 \pi + 5 r$ D) $r_2 C_{42} 2 2$

05. (FUVEST-SP-2006) Na figura a seguir, o triângulo ABC

C₃ AB inscrito na circunferência tem $AB = AC$. O ângulo entre o lado

e a altura do triângulo ABC em relação a BC é a. Nessas

MATEMÁTICA

Nela, a circunferência maior C tem raio 2, e cada uma condições, o quociente entre a área do triângulo ABC e a área

das circunferências menores, C do círculo da figura é dado, em função de a, pela expressão C_1 , C_2 , C_3 e C_4 , é tangente

a C e a um lado do quadrado inscrito. Os centros de C_1 , A

C_2 , C_3 e C_4 estão em diâmetros de C perpendiculares a

lados do quadrado. A soma das áreas limitadas por essas α

quatro circunferências menores é

$$\begin{aligned} & \text{A) } 8p(3 - 2^{1/2}) \quad \text{C) } 2p(3 - 2^{1/2}) \quad \text{B) } 2(3 + 2^{1/2}) \quad \text{D) } 8p \\ & (3 + 2^{1/2}) \end{aligned}$$

02. (UNIFESP–2007) Se um arco de 60° num círculo I tem o A) $\frac{1}{2} \cos \alpha$ D) $\frac{1}{2} \cos \alpha$ mesmo comprimento de um arco de 40° num círculo II,

então a razão da área do círculo I pela área do círculo II é $\frac{1}{2} \cos \alpha$ E) $\frac{1}{2} \cos \alpha$ **03.** (UFMG) Observe a figura.

A EXERCÍCIOS PROPOSTOS

45° I (EFOA-MG–2006) Na figura a seguir, tem-se um círculo de **01.**

3 cm de raio e quatro triângulos equiláteros com vértices

C G O no centro desse círculo.

D F

E

Nela, a circunferência de centro **O** tem raio **r** e arcos A^1B ,

B^1C , C^1D , D^1E , E^1F , F^1G , G^1H e H^1A congruentes. O valor da

área sombreada, em função de **r**, é A área da região hachurada, em cm^2 , é

- A) $r^2(p - 2)$ B) $2r^2(p - 1)$ C) $2r^2$ D) $r^2(p - 1)$ A) $4p$ B) $6p$ C) $2p$
D) $5p$ E) $3p$

Editora Bernoulli **47**

Frente D Módulo 10

02. (Mackenzie-SP–2006) Na figura, o raio OA da circunferência **07.**
(UFTM-MG) A figura mostra uma circunferência de

mede 6 cm. Adotando-se centro **O** e raio igual a 2 e um pentágono regular ABCDO, $p = 3$, a área da região

sombreada, em cm^2 cujos vértices **A** e **D** pertencem à circunferência. A região 2, é igual a hachurada tem área igual a

C

A) $9(4 - \sqrt{3})$ C) $4\sqrt{3}$ E) $4(9 - \sqrt{3})$

B) $9 - \sqrt{3}$ D) $9\sqrt{3}$

03. A) 6π B) 8π C) 9π D) 10π E) 12π (UFOP-MG-2008) O triângulo ABC da figura a seguir está inscrito em uma

circunferência de raio $\sqrt{3}$ cm. O lado AB é igual a $\sqrt{3}$ cm. O ângulo C

08. (UFMG) Observe a figura. A circunferência está inscrita no triângulo ABC. O raio da circunferência é $\sqrt{3}$ cm. O lado AB é igual a $\sqrt{3}$ cm. O ângulo C

A

C

M

A 30° O B O B H C

Nessa figura, o triângulo ABC é equilátero e está inscrito em uma

circunferência de centro O e raio $r = 6$ cm; AH $\perp$ BC

A) π e M é ponto médio do arco AC. DETERMINE a área da região hachurada.
B) π e M é ponto médio do arco AB. DETERMINE a área da região hachurada.
C) π e M é ponto médio do arco BC. DETERMINE a área da região hachurada.

B) 33π C) 33 D) 2222 ABCD, cuja área mede 8 m^2 . B¹D é um arco de

04. circunferência de centro em A. A medida da área da (Mackenzie-SP) Na figura a seguir, os círculos internos 2 região BCE, em m

são iguais e a região assinalada tem área $8(p - 2)$. Então, D, é C

a área do círculo externo é

A) $20p$

B) $16p$ E

C) $8p$

D) $4p$

A B

E) $2p$

A) $8 - p$ C) $6 - p$ E) $4 - p$

05. B) $7 - p$ D) $5 - p$ (UFBA) O triângulo ABC está inscrito num círculo de área

igual a 16 p cm^2 , sendo $A = 30^\circ$, $AB = 8\text{ cm}$ e **10.** (UEL-PR) Na figura, ABCD é um quadrado cujo lado mede **a**.

AC.BC = $x\text{ cm}^2$. **DETERMINE** o valor de x^3 . Um dos arcos está contido na circunferência de centro C

06. (FUVEST-SP) Na figura, ABCD é um quadrado de lado 1, no ponto médio de BC e de diâmetro **a**. A área da região e raio **a**, e o outro é uma semicircunferência de centro

DEB e CEA são arcos de circunferências de raio 1. hachurada é

Logo, a área da região hachurada é

A D

A) $\pi 3 D C 1 - + 6 4$

B) $\pi 3 1 - + E 3 2$

C) $\pi 3 1 - - A B B C 6 4$

D) $\pi \pi 2 2 a \pi a 1 \pi a 2 3 A) C) - + 1 1 + - E) 6 8 2 6 3 2$

E) $- - B) D) - 1 \pi \pi a 2 3 \pi a 2 1$

$3 4 8 6 3$

48 Coleção Estudo

Áreas de círculo e suas partes

11. (UFPR–2007) Um cavalo está preso por uma corda **14.** (UFMG–2006) Nesta figura, os dois círculos são tangentes

do lado de fora de um galpão retangular fechado, entre si e tangentes aos lados do retângulo ABCD.

de 6 metros de comprimento por 4 metros de largura. D C

A corda tem 10 metros de comprimento e está fixada

num dos vértices do galpão, conforme ilustra a figura a seguir. Determine a área total da região em que o animal pode se deslocar.

A) $(75p + 24) \text{ m}^2$ A B

B) $88p \text{ m}^2$ Sabe-se que o raio do círculo menor e o do círculo maior

C) $20p \text{ m}^2$ medem, respectivamente, 2 cm e 4 cm e o lado AB do

D) $(100p - 24) \text{ m}^2$ retângulo mede 9 cm.

E) $176p \text{ m}^2$

2 1. **CALCULE** o comprimento do lado AD do retângulo.

2. **CALCULE** a área da região sombreada na figura.

12. (UFMG) Os raios dos círculos de centros A e B medem 3 m

e $3\sqrt{3}$ m, respectivamente, e a distância AB mede 6 m.

SEÇÃO ENEM

CALCULE a área da região comum aos mesmos.

01. (Enem–2009) Dois holofotes iguais, situados em

M

H1 e H2, respectivamente, iluminam regiões circulares,

ambas de raio R. Essas regiões se sobrepõem e

A B determinam uma região S de maior intensidade luminosa,
MATEMÁTICA conforme figura. N

H1 H2

13. (UFSCar-SP) Para fins beneficentes, foi organizado um desfile de modas num salão em forma de círculo, com 20 metros de raio. A passarela foi montada de acordo com a figura a seguir, sendo que as passarelas CA e CB são lados que corresponderiam a um triângulo equilátero inscrito na circunferência. No espaço sombreado, ocupado pela R R plateia, foram colocadas cadeiras, sendo uma cadeira por m

2 S

e um ingresso para cada cadeira.

B Área do setor circular: $A \propto R^2$, sc Aa em radianos
 sc 2 C

A área da região S, em unidades de área, é igual a

O

A) $2\pi R^2 - 3R^2$

B) $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{3}{4} \right) R^2$

Adotando $\pi = 3,14$ e $p = 3,14$: $\pi \cdot 2 \cdot R \cdot C) - 12 \cdot 8 \cdot A)$
DETERMINE quantos metros cada modelo desfilou,

segundo uma única vez o roteiro BC, CA, AO e OB. $2 \cdot \pi \cdot R$
D)

2

B) Sabendo-se que todas as cadeiras foram ocupadas,

CALCULE quantos ingressos foram vendidos para $\pi \cdot 2 \cdot R \cdot E)$
este evento. 3

Editora Bernoulli 49

Frente D Módulo 10

02. (Enem–2004) Uma empresa produz tampas circulares **04.** A
parte superior do projeto de um monumento foi

de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas construída a
partir de uma semicircunferência de raio

quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 12 cm. Para
a construção da casa de sino, foi retirada a

1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e região abaixo
do arco BC e acima da reta que liga BC.

16 tampas pequenas. A área, em cm^2 , da região representada na
figura delimitada

pelo triângulo BCE e pelos setores circulares AEB e CED é

GRANDE MÉDIA PEQUENA

$$\text{m Área do círculo} = \pi r^2$$

As sobras de material da produção diária das tampas B C grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas 60^º informações, pode-se concluir que A D

E

A) a entidade I recebe mais material do que a entidade II. Centro do círculo

B) a entidade I recebe metade de material do que a entidade III.

C) a entidade II recebe o dobro de material do que a entidade III.

D) as entidade I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III.

E) as três entidades recebem iguais quantidades de A) $24\pi + 183$

D) $48\pi + 273$

material. B) $24\pi + 273$ E) $48\pi + 363$

03. C) $24\pi + 363$ (Enem–2009) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de

3 km x 2 km que contém uma

área de extração de ouro

GABARITO delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir

do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior

Fixação

valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram

em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse 01. C 02. B 03. A 04. B 05. E

com a terça parte da área de extração, conforme mostra

Propostos a figura.

3 km

01. E 10. B

02. A 11. B

João 15 9 3 03. A 12. $\pi - m_2$ 2 Pedro

04. B 13. A) 109,2 m

2 km

05. 48 cm² B) 910 ingressos vendidos.

1 km José 06. C 14. 1. $AD = 3(2 + \sqrt{3})$ cm

$$07. A \ 21 \ 3_2 \ 2. \ 20 \ + \ - \ 8 \ p \ cm \ 2$$

Em relação à partilha proposta, constata-se que a $1 \ km \ 27 \ 3 \ 08.$
 $+ \ 6p \ cm_2 \ 2$

porcentagem da área do terreno que coube a João 09. E

corresponde, aproximadamente, a $(\) \ 3 \ |$ **Seção Enem**

| Considere: $= \ 0 \ 58 \ , \ | \ 3 \ (\) \ 01. \ A \ 02. \ E \ 03. \ E \ 04. \ E$

A) 50%. B) 43%. C) 37%. D) 33%. E) 19%.

50 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Polinômios I 17 E

DEFINIÇÃO DE POLINÔMIO

Resolução: Igualando os coeficientes dos termos correspondentes,

obtemos:

Um polinômio é uma função na variável x da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

|| 3 } = - c 1 Em que: || 9 3 = b | i) a , a , ..., a e a são os coeficientes do polinômio. $a_n - 1 1 0$

ii) Os expoentes são números naturais. Resolvendo o sistema, obtemos $a = 6$, $b = 3$ e $c = 4$.

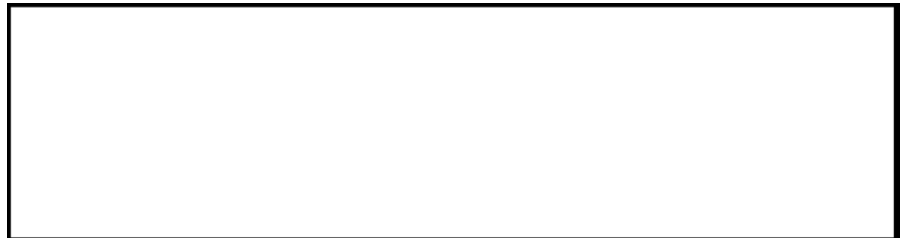
Exemplos RAIZ OU ZERO DE UM POLINÔMIO

$$1^\circ) P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x + 2$$

Dizemos que um número k é raiz de um polinômio $P(x)$ se,

$$2^\circ) P(x) = -4x^5 + 8x^4 - 9x^3 + 18x^2 + 7x - 1 \text{ e}$$

somente se, $P(k) = 0$.



Do ponto de vista geométrico, a raiz representa o ponto no

Um polinômio é dito **nulo** se todos os seus coeficientes

qual a curva, correspondente ao gráfico de $P(x)$, intercepta

são iguais a zero.

Portanto, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ o eixo das abscissas no plano cartesiano.

é nulo se, e somente se, $a_n = 0$.
 $a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$.

GRAU DO POLINÔMIO

Considere o polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Dizemos que o grau de $P(x)$ é igual a n , se $a_n \neq 0$.

OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

Exemplos Adição e subtração

1°) O grau de $P(x) = 7x^4 - 3x^2 + 8$ é igual a 4.

Dados os polinômios:

2°) O grau de $P(x) = 2x^2 + 8$ é igual a 2. $A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

3°) O grau de $P(x) = 13$ é igual a zero. $B(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$

OBSERVAÇÃO i) A adição $A(x) + B(x)$ é dada por:

Não se define o grau de um polinômio nulo. $A(x) + B(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$

$$(a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

POLINÔMIOS IDÊNTICOS ii) A

subtração $A(x) - B(x)$ é dada por:

$$Q(x) \text{ Os polinômios } P(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ A(x) - B(x) = (a_n - b_n)x^n + \dots + (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

e somente se, a Portanto, nessas operações, basta adicionarmos ou $= b$, $a = b$, ..., $a = b$, $a = b$ e $a = b$, $a = b$ subtrairmos os termos semelhantes. $= b x^n + \dots + b x^2 + b x + b$ são idênticos se, $a = b$

e escrevemos $P(x) \equiv Q(x)$.

Exemplo

Exemplo Considerar os polinômios $A(x) = 5x^4 - 3x^3 + 18x^2 - 9x + 12$

Determinar os valores de **a**, **b** e **c** para os quais os polinômios $B(x) = x^4 + 23x^3 - 7x^2 + x + 3$.

Assim, temos:

$$P(x) = ax^2 + 3x + 9 \text{ e } B(x) = (b + 3)x^2 + (c - 1)x + 3b \\ A(x) + B(x) = 6x^4 + 20x^3 + 11x^2 - 8x + 15 \\ \text{são idênticos. } A(x) - B(x) = 4x^4 - 26x^3 + 25x^2 - 10x + 9$$

Multiplicação Repetindo o processo, dividimos $-6x_2$ por x_2 .

O produto dos polinômios $A(x)$ e $B(x)$ é obtido através da $4x_3 + 2x_2 - + x_1 x_2 + 2x + 3$

multiplicação de cada termo de $A(x)$ por todos os termos $3_2 - 4x - 8x - 12x 4x - 6$ de $B(x)$, reduzindo os termos semelhantes. $- 2 6 x - 13x + 1$

O grau do polinômio $A(x).B(x)$ é igual à soma dos graus

de $A(x)$ e $B(x)$. Multiplicamos -6 por todos os termos do divisor, da

direita para a esquerda. O resultado de cada multiplicação

Exemplo é colocado, com o sinal trocado, abaixo de cada termo

correspondente, no dividendo. Em seguida, somamos esses

Sejam os polinômios $A(x) = x_2 - 3x + 2$ e $B(x) = 2x - 1$. termos.

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 A(x).B(x) &= (x_2 - 3x + 2)(2x - 1) \Rightarrow -4x_3 - 8x_2 - 12x + 4x - 6 \\
 A(x).B(x) &= 2x_3 - x_2 - 6x_2 + 3x + 4x - 2 \Rightarrow -6x_2 - 13x + 18 \\
 A(x).B(x) &= 2x_3 - 7x_2 + 7x - 2
 \end{aligned}$$

Divisão (método da chave) $- + x 19$

Observe que não podemos continuar a divisão, pois o grau

Da divisão de dois polinômios $A(x)$ e $B(x)$ não nulos são do termo obtido é menor do que 2.

obtidos os polinômios $Q(x)$ (quociente) e $R(x)$ (resto), tais que:

Portanto, temos:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad \text{Quociente: } Q(x) = 4x - 6 \text{ e } R(x) = -x + 19$$

onde $gr(R) < gr(B)$ ou $R(x) = 0$

Em que: EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

$A(x)$: Dividendo $gr(R)$: grau de $R(x)$

$B(x)$: Divisor $gr(B)$: grau de $B(x)$ **01.** (UFMG) O valor de a para que $x^2 + ax + 1$ seja raiz do

$Q(x)$: Quociente $P(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$ é

$R(x)$: Resto A) -3 B) -1 C) 1 D) 3

Para esclarecermos o método da chave, vamos efetuar a

divisão do polinômio $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 1$ pelo polinômio **Resolução:** $B(x) = x^2 + 2x + 3$. Temos que:

Inicialmente, devemos verificar se o grau do

$$\text{dividendo } P(1 + 1^2) = (1 + 1^2)_3 + a(1 + 1^2)_2 + 1 + 1^2 + 1 = 0$$

é maior ou igual ao grau do divisor. Caso contrário, não é

Desenvolvendo os termos, obtemos:

possível efetuar a divisão. No problema, o grau do

$$\text{dividendo } 1 + 3 \cdot 1^2 + 6 + 2 \cdot 1^2 + a(1 + 2 \cdot 1^2 + 2) + 2 + 1^2 = 0$$

é igual a 3 e o grau do divisor é igual a 2. Portanto, podemos

$$\text{efetuar a divisão. } 9 + 6 \cdot 1^2 + 3a + 2 \cdot 1^2 a = 0 \Rightarrow 9 + 6 \cdot 1^2 = -3a - 2 \cdot 1^2 a$$

Escrevemos os polinômios no seguinte formato:

Igualando os termos correspondentes, temos $a = -3$.

$$4x^3 + 2x^2 - x + 1 \quad x^2 + 2x + 3 \quad \mathbf{02.} \text{ (UFES) O polinômio } x^3 + ax^2 + bx + 7, \text{ com coeficientes } a, b$$

reais, é divisível por $x^2 + x + 1$. O valor da soma $a + b$

Inicialmente, dividimos o primeiro termo do dividendo é igual a

pelo primeiro termo do divisor. A) 7 B) 14 C) 15 D) 16 E) 21

$$4x^3 + 2x^2 - x + 1 \quad x^2 + 2x + 3 \quad \textbf{Resolução:}$$

4x Vamos efetuar a divisão pelo método da chave.

Em seguida, multiplicamos $4x$ por todos os termos do $x^3 + ax^2 + bx + 7x^2 + x$

divisor, da direita para a esquerda. O resultado de cada $32x - x - xx + (a - 1)$ multiplicação é colocado, com o sinal trocado, abaixo de $(-2a1)x + (b - 1)x + 7$ cada termo correspondente, no dividendo. Em seguida, $2 - (a - 1)x - (a - 1)x + (1 - a)$ somamos esses termos. $(bax -) + (8 - a)$

$4x^3 + 2x^2 - + x1x^2 + 2x + 3$ Como o polinômio é divisível, então devemos igualar o

$- 4x^3 - 8x^2 - 12x$ $4x$ resto ao polinômio nulo, ou seja, $a = b = 8$.

$- 6x^2 - 13x + 1$ Portanto, $a + b = 16$.

52 Coleção Estudo

Polinômios I

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO 02. (UFMG)

Considere o polinômio:

01. (UFOP-MG-2008) Sejam os polinômios $p(x) = (a + b)x^4 - 5$ O polinômio $p(x)$ é igual a $p(x) = (x - 1)(x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4)$

e $q(x) = -2x^4 + (a + c)x^2 + b + c$, em que **a**, **b** e **c** são

números reais. Suponha que $p(x)$ e $q(x)$ sejam iguais A) $x^4(x^3 - 1)(x^3 + 1)$ C) $x^4(x^3 - 1)^2$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, $a + b + c$ vale B) $x^4(x^6 - 2x^4 + 1)$ D) $x^4(x^6 - 2x^2 + 1)$

A) $5\sqrt{7} - 7$ B) $-\sqrt{7}$ C) -2 D) $-\sqrt{2}$ **03.** (UFMG) Considere os polinômios: **02.** (UFMG) Sejam $p(x) = 4x^3 + bx^2 + cx + d$ e $p(x) = ax^3 + (2a - 3b)x^2 + (a + b + 4c)x - 4bcd$

$q(x) = mx^2 + nx - 3$, polinômios com coeficientes reais. $q(x) = 6x^2 + 18x + 5$, em que a, b, c e d são números

Sabe-se que $p(x) = (2x - 6) \cdot q(x) + x - 10$.
Considerando-se reais. Sabe-se que $p(x) = q(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim

essas informações, é **INCORRETO** afirmar que sendo, o número d é igual a

A) se 10 é raiz de $q(x)$, então 10 também é raiz de $p(x)$.

B) $p(3) = -7$ C) $d = 18$

D) $m = 2$

04. (UFMG) Sejam $P(x) = x^2 - 4$ e $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + a$,

03. (UFMG-2006) Neste plano cartesiano, está representado em que $Q(2) = 0$. O resto da divisão de $Q(x)$ por $P(x)$ é

o gráfico do polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sendo

A) $-x - 2$ C) $x + 2$ E) $-9x + 18$

a, b, c e d números reais.

B) $9x - 18$ D) 0

y

05. (PUC Rio) Se $x^2 + 2x + 5$ divide $x^4 + px^2 + q$ exatamente

(isto é, o resto da divisão do segundo polinômio pelo primeiro é zero), então

$$A) p = -2 \text{ e } q = 5 \quad D) p = 6 \text{ e } q = 25$$

$$-1 \quad 6 \quad x \quad B) p = 5 \text{ e } q = 25 \quad E) p = 14 \text{ e } q = 25$$

$$C) p = 10 \text{ e } q = 20$$

MATEMÁTICA

Considere estas afirmativas referentes a esse polinômio:

I. $a - b + c - 5 = 0$; e **06.** (UFJF-MG) Ao dividirmos um polinômio $p(x)$ por outro

II. $p(p(6)) > p(6)$. polinômio $q(x)$, encontramos um resto $r(x) = x - 1$.

Então, é **CORRETO** afirmar que É **CORRETO** afirmar que o

A) nenhuma das afirmativas é verdadeira. A) grau de $p(x)$ é igual a 2.

B) apenas a afirmativa I é verdadeira.

B) grau de $q(x)$ é igual a 2.

C) apenas a afirmativa II é verdadeira.

D) ambas as afirmativas são verdadeiras. C) grau de $q(x)$ é maior que 1.

D) grau de $p(x)$ é igual a 1.

04. (UFMG-2007) Sejam $p(x) = ax^2 + (a - 15)x + 1$ e

$q(x) = 2x^2 + 1$ **07.** (UFES) O polinômio $P(x)$, quando dividido por $x^2 - 3x + 1$, fornece o quociente $x + 1$ e o resto $x - 1$. O coeficiente Sabe-se que esses polinômios possuem as mesmas raízes. do termo do primeiro grau no polinômio $P(x)$ é Então, é **CORRETO** afirmar que o valor de $a + b$ é

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4 3 B) 6 C) 9 D) 12

05. (UFOP-MG-2007) O resto da divisão do polinômio **08.** (UFMG) Os valores de **m** e **n**, para os quais o resto da

$p(x) = x^{99} - 2x + 3$ pelo polinômio $q(x) = x^2 - 1$ é divisão de $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + mx + n$ por $Q(x) = x^2 - 3x + 2$

A) $-x + 3$ B) 6 C) 8 D) $3x - 1$ seja $2x + 1$, são

EXERCÍCIOS PROPOSTOS A) $m = 9$ e $n = -1$ D) $m = 2$ e $n = 1$

B) $m = -3$ e $n = 7$ E) $m = -6$ e $n = 2$

01. C) $m = 2$ e $n = 3$ (Unifor-CE) Se os polinômios

4 2 2 4

são idênticos, então $g(x) = x^3 + 2ax^2 + (3a - b)x + 2$ pelo polinômio $q(x) = x - ax + a^2$, $a \in \mathbb{R}$, é $f(x) = x^3 + (a - b)x^2 + (a - b - 2)x + 4$ e **09.** (UFMG) O quociente do polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + a$

A) $ab = 3$ C) $b = 3a$ E) $ab = -1$ 2 B) x A) $x^2 - ax + a$ D) $x^2 + ax + a$

$a - ax + a^2$ E) $x^2 + ax + a^2$

B) $a = 3b$ D) $= 1$ 2 b C) $x - a^2x + a$

Frente E Módulo 17

10. (U F T M - M G) S e n d o k u m n ú m e r o r e a l e 02.

Observe a notícia a seguir:

$P(x) = -x_5 + 2x_3 - x_2 + k_2$ um polinômio divisível pelo **Robô-bombeiro feito no Brasil ensaia entrada no**

polinômio $D(x) = x_3 + 1$, pode-se concluir que k_2 é um **mercado internacional**

número Por Guilherme Felitti, repórter do IDG Now! Publicada

A) em 19 de out. de 2006 às 18h19 Atualizada natural. D) irracional.

em 20 de out. de 2006 às 11h17

B) inteiro negativo. E) imaginário puro.

São Paulo – Desenvolvido em Fortaleza para combater

C) racional não inteiro.

incêndios, SACI já é testado pela Petrobrás e desperta

11. *interesses nos EUA, Índia e Austrália.* (U F V - M G) O r e s t o d a d i v i s ã o d o p o l i n ô m i o



$p(x) = 5x_3 - 4x_2 + mx + n$ pelo polinômio $q(x) = x_2 - 2x + 1$

é $r(x) = 3x + 2$. Então, o produto mn é igual a

A) 32 B) -32 C) -16 D) 16 E) 12

12. (UFF-RJ) As raízes de um polinômio $P(x)$ de grau 3 são

r, s e t . Então, as raízes do polinômio $Q(x) = [P(x)]^2$ são Além de dálmatas, bombeiros poderão ter outra

A) r^2, s^2, t^2 D) , , funções mais interessantes que os cães malhados. 2 2

r s t companhia dentro das brigadas a partir de 2007, com

B) $2r, 2s, 2t$ O robô-bombeiro SACI, construído como projeto de E) $r - 2, s - 2, t - 2$

conclusão por um grupo do curso de Engenharia da

C) r, s, t

Computação da Universidade de Fortaleza, deverá

começar a ganhar o mundo já no próximo ano.

13. (U F R G S) S a b e n d o - s e q u e o p o l i n ô m i o Já usado em testes dentro da Petrobrás, o robô, que tem

$x^4 + 4x^3 + px^2 + qx + r$ é divisível por $x^3 + 3x^2 + 9x + 3$, a sigla de Sistema de Apoio ao Combate de Incidentes

segue que p é igual a como nome, está em sua terceira versão e será vendido

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15 para a Brigada de Chicago até o final do ano.

“O Corpo de Bombeiros da cidade entrou em contato

14. (UFPR–2007) Sabendo-se que o polinômio para adquirir uma unidade que subisse escadas”,

$p(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx - a$ é divisível pelo polinômio afirma Roberto Macedo, diretor técnico de pesquisa e

2 desenvolvimento da Armtec, responsável pelo SACI.

A) $2a + b = -2$ 1 Considere que o robô descrito anteriormente se desloque D) $2a - b = q(x) = x + 1$, é **CORRETO** afirmar:

ao longo do gráfico do polinômio $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$.

4

1 O sistema cartesiano de eixos foi posicionado de modo que

B) $a + 2b = E) a - b = -1$ 2 as raízes reais desse polinômio indicam possíveis focos de

C) $a - 2b = 0$ incêndio, os quais serão combatidos pelo robô. Portanto,

pode-se afirmar que o robô bombeiro será utilizado

SEÇÃO ENEM A) Nenhuma vez D) três vezes. B) uma vez. E) quatro vezes. C) duas vezes.

01. Ao estudar a variação entre os valores de duas

grandezas **P** e **X**, um pesquisador concluiu que a relação

GABARITO

matemática que caracterizava essa variação era dada

pelo polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, em que **x** era o

Fixação

valor da grandeza **X** e $P(x)$ era o valor correspondente da

grandeza **P**. Parte dos dados coletados pelo pesquisador 01. D 02. C 03. D 04. C 05. A

encontram-se a seguir: **Propostos**

X P

0 01. E 04. B 07. D 10. A 13. D 2

02. A 05. D 08. B 11. B 14. A

1 5

03. A 06. C 09. E 12. C

2 10

Com base nas informações apresentadas, pode-se afirmar

Seção Enem

que o valor do coeficiente **a** é 01. B 02. D

A) -3 B) -2 C) 0 D) 2 E) 3

54 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE
Polinômios II 18 E

TEOREMA DO RESTO TEOREMA
DE D'ALEMBERT

O resto da divisão de $P(x)$ por um binômio $ax + b$ é $P\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a}P'(x)$.
 $P(x)$ é divisível por $ax + b$ se, e somente se, $P\left(\frac{b}{a}\right) = 0$.

Podemos verificar esse fato facilmente. Temos:
 Observe que o Teorema de D'Alembert é uma consequência

imediate do Teorema do Resto. Eis a demonstração:

$$P(x) = (ax + b)Q(x) + R$$

$$R = P\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a}P'\left(\frac{b}{a}\right)$$

Podemos escrever na forma $P(x) = (ax + b)Q(x) + R$ Conforme vimos anteriormente, fazendo $x = -\frac{b}{a}$, temos $P\left(-\frac{b}{a}\right) = (a\left(-\frac{b}{a}\right) + b)Q\left(-\frac{b}{a}\right) + R$.

$$\text{Para } x = -\frac{b}{a}, \text{ temos: } P\left(-\frac{b}{a}\right) = R$$

Porém, o polinômio $P(x)$ é divisível por $ax + b$ se, e somente se, $P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$.
 $P\left(-\frac{b}{a}\right) = (a\left(-\frac{b}{a}\right) + b)Q\left(-\frac{b}{a}\right) + R = 0$
 $\Rightarrow R = 0$ e somente se, R for igual a zero.

Desse modo, o teorema está

demonstrado. $b \mid Q - R \implies b \mid -R \implies b \mid R$

$P(x) = b^n + \dots + 0 \cdot x + \dots + R$ DISPOSITIVO DE BRIOT-RUFFINI $P(x) = b^n + \dots + 0 \cdot x + \dots + R$

$P(x) \in R[x]$ É um dispositivo prático que permite determinar o

$Q(x) = \frac{P(x)}{B(x)}$ = quociente e o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por um binômio da forma $x - a$. Como exemplo, vamos efetuar a

divisão do polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 - x + 4$ por $B(x) = x - 2$.

Em outras palavras, para encontrarmos o resto da **Inicialmente**, vamos posicionar os termos indicados,

divisão de um polinômio $P(x)$ por um binômio do **conforme** o esquema a seguir:

1º grau, basta calcularmos a raiz do binômio do 1º grau e, em seguida, substituímos no polinômio $P(x)$.

Raiz do divisor Coeficientes do dividendo

Exemplo Coeficientes do quociente Resto

Calcular o resto da divisão do polinômio

$P(x) = 3x_3 + 4x_2 - x + 5$ por $B(x) = x - 1$. Assim, temos:

Resolução: 2 1 3 -1 4

Cálculo da raiz de $B(x)$:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Repetimos o coeficiente do termo de maior grau.

O resto R é dado por:

$$R = P(1) = 3.1_3 + 4.1_2 + 1.3_{-1} + 4_{-1} + 5 \Rightarrow$$

1

$$R = 3 + 4 - 1 + 5 = 11$$

Editora Bernoulli **55**

Frente E Módulo 18

Multiplicamos essa raiz (2) pelo coeficiente que foi

Demonstração:

repetido (1) e, em seguida, somamos com o próximo

Se $P(x)$ é divisível por $(x - a)(x - b)$, podemos escrever

coeficiente (3). O resultado é colocado à direita de 1.

da
seguinte
forma:

Fazemos $2.1 + 3 = 5$.

$$P(x) = (x - a)(x - b)Q(x) + R(x)$$

$$2.1 + 3 = 5$$

$$0 = Q(x)$$

$$1.5$$

Em que $Q(x)$ é o polinômio quociente.

Repetimos o processo, agora com o último termo obtido (5).

Logo, temos $P(x) = (x - a)(x - b)Q(x) + R(x)$.

Fazemos $2.5 - 1 = 9$. Pelo Teorema de D'Alembert, $P(x)$ é divisível por $x - a$ se,

$$2 \text{ e somente se, } P(a) = 0. \quad 1.3 - 1.4$$

$$1.5.9 \text{ Assim, temos } P(a) = (a - a)(a - b)Q(a) = 0.$$

Logo, $P(x)$ é divisível por $x - a$.

Finalmente, repetimos para o termo 9. Assim, obtemos

o último termo, separado por uma linha tracejada.

Analogamente, $P(x)$ será divisível por $x - b$ se, e somente

Esse número é o resto da divisão de $P(x)$ por $B(x)$. se, $P(b) = 0$.

Fazemos $2.9 + 4 = 22$. Assim, temos que $P(b) = (b - a)(b - b).Q(b) = 0$.

Logo, $P(x)$ é divisível por $x - b$.

2 1 3 -1 4

1 5 9 22

Os números obtidos (1, 5 e 9) são os coeficientes do

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

polinômio quociente. Como $P(x)$ é do 3º grau e $B(x)$ é do 1º grau, o dividendo deverá ser, necessariamente.

01. (FGV-SP) Se o polinômio $x^3 - 2mx^2 + (-m + 6)x + 2m + n$ do 2º grau. Por isso, costumamos dizer que o Dispositivo de é divisível por $x - 1$ e por $x + 1$, então $m + n$ é igual a

Briot-Ruffini serve para abaixar o grau do polinômio $P(x)$.

A) 7 B) -7 C) 6 D) -6 E) 0

Mais à frente, veremos uma importante aplicação desse

fato no cálculo de raízes de equações. Portanto, temos

Resolução: 2 o quociente $Q(x) = x + 5x + 9$ e o resto

$R(x) = 22$. Pelo Teorema de D'Alembert, temos $P(1) = 0$ e $P(-1) = 0$.

OBSERVAÇÃO $P(-1) = (-1)^3 - 2m(-1)^2 + (-m + 6)(-1) + 2m + n \Rightarrow$



Podemos utilizar o Método de Briot-Ruffini também quando $0 = -1 - 2m + m - 6 + 2m + n \Rightarrow m + n = 7$

o divisor é um polinômio da forma $ax + b$. Nesse caso, Observe que não foi necessário fazer $P(1) = 0$, pois a

devemos dividir os coeficientes do polinômio quociente por **a**.
pergunta envolvia $m + n$.

Exemplo 02. (Mackenzie-SP)

Efetuar a divisão de $P(x) = 5x^3 + x^2 - 2x + 1$ por $2x - 4$.

$$P(x) : (2x - 4) = Q(x) \cdot (2x - 4) + R$$

Resolução: $14 Q(x) : Q(x) = 1$ A raiz do binômio do 1º grau é igual a 2. Assim, temos:

Considerando as divisões de polinômios dadas, podemos

$251 - 21$ afirmar que o resto da divisão de $P(x)$ por $2x - 4$ é

$$5112041 A) 2x + 2 D) 3x - 2$$

Para obtermos o polinômio quociente, devemos dividir B) $2x + 1$ E) $x + 1$

cada termo obtido por 2. É importante observar que $c) x + 2$ o resto não se altera. Assim, temos como quociente

Resolução

$Q(x) = 5x^2 + 11x + 10$ Podemos escrever do seguinte modo: $P(x) = (x - 2).Q(x) + R(x)$ e
 resto $R(x) = 4$

TEOREMA DA DIVISÃO PELO $Q(x) = (x - 6).Q_1(x) + 1$

Substituindo a expressão para $Q(x)$ em $P(x)$, temos:

PRODUTO $P(x) = (x - 2)[(x - 6).Q_1(x) + 1] + 4 \Rightarrow P(x) = (x - 2).(x - 6).Q_1(x) + x - 2 + 4 \Rightarrow$



Um polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - a)(x - b)$ se, $P(x) = (x^2 - 8x + 12).Q_1(x) + x + 2$

e somente se, $P(x)$ é divisível separadamente por $x - a$ e Logo, o resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 - 8x + 12$ é igual

por $x - b$. a $(x + 2)$.

Polinômios II

03. Um polinômio $P(x)$ deixa resto 1 quando dividido por $x - 1$ **04.** (FUVEST-SP) Seja $p(x)$ um polinômio divisível por $x - 3$.

e deixa resto 4 quando dividido por $x + 2$. Determinar o Dividindo-se $p(x)$ por $x - 1$, obtemos quociente $q(x)$ e

resto da divisão do polinômio $P(x)$ por $(x - 1)(x + 2)$. resto $r = 10$. O resto da divisão de $q(x)$ por $x - 3$ é

A) -5 B) -3 C) 0 D) 3 E) 5

Resolução:

Vamos representar os dados da seguinte forma: $2 \ 3$

05. (FUVEST-SP-2009) O polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$,

$P(x) \div (x - 1)$ Pelo Teorema do Resto, em que a e b são números reais, tem restos 2 e 4 quando temos que $P(1) = 1$. $1 \ Q_1(x) \div (x - 2)$ dividido por $x - 2$ e $x - 1$, respectivamente. Assim, o valor

$P(x)$ de a é $() x + 2$ Pelo Teorema do Resto,

4 temos que $P(-2) = 4$. $Q(x) \div (x - 1)$ A) -6 B) -7 C) -8 D) -9 E) -10

Agora, observe que $(x - 1)(x + 2)$ é um polinômio do

segundo grau. Na divisão de $P(x)$ por $(x - 1)(x + 2)$,

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

o grau do resto deve ser menor do que o grau do divisor.

Portanto, o resto $R(x)$ é da forma $R(x) = ax + b$, em que **01.** (PUC Minas) O resto da divisão de $P(x) = ax^3 - 2x^2 + 1$

a e b são números reais. por $Q(x) = x - 3$ é 4. Nessas condições, o

valor de a é

$$P(x) = A(x-1)(x+2) + B(x-1) + C(x+2) + D$$

$$(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$$

$$ax + b + Q(x) = (x-1)(x+2) + Q(x)$$

02. (UFJF-MG-2006) O polinômio $p(x)$ é divisível por $x + 3$,

$P(x) = (x-1)(x+2) + Q(x) + ax + b$ por $x-1$ e por $x+5$.
Podemos dizer que o seu grau g é

Fazendo $x = 1$, temos: A) $g > 3$ C) $g \geq 3$ E) $g \leq 3$

$$P(1) = (1-1)(1+2) + Q(1) + a(1) + b = 0 + Q(1) + a + b = 0$$

$1 = a + b$ **03.** (UEL-PR) Sobre um polinômio $p(x)$ de grau 1, sabe-se que

Fazendo $x = -2$, temos: I. sua raiz é igual a 2

$4 = -2a + b$ Nessas condições, é
CORRETO afirmar: **MATEMÁTICA** $\{$
 $P(-2) = (-2-1)(-2+2) + Q(-2) + a(-2) + b = 0 + Q(-2) - 2a + b = 0$ $\Rightarrow$ II. $p(-2)$ é igual ao dobro de sua raiz

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a + b = 1 \\ -2a + b = 4 \end{cases}$, temos $a = -1$ e $b = 2$. A) $p(x) = -x + 2$ D) $p(x) = x^2 - x - 2$ $\{$ $-2a + b = 4$ $\} \cup$ B) $p(x) = 2x - 4$
E) $p(x) = -x^2 + x + 2$

Portanto, o resto é igual a $R(x) = -x + 2$. C) $p(x) = x - 2$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO **04.** (UNIFESP)

Dividindo-se os polinômios $p_1(x)$ e $p_2(x)$

por $x - 2$, obtêm-se, respectivamente, r_1 e r_2 como restos. Sabendo-se

01. $y = ax^2 + bx + c$, conforme gráfico, (UFJF-MG / Adaptado) Um polinômio $P(x)$, quando dividido

pelo polinômio $q(x) = x^2 - 4$, deixa resto $r(x) = 3x + 5$. $y = ax^2 + bx + c$ Então, o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 2$ é igual a

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1

02. (FUVEST-SP) Dividindo-se o polinômio $p(x)$ por $2x^2 - 3x + 1$, 5

obtem-se quociente $3x^2 + 1$ e resto $-x + 2$. Nessas condições, o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 1$ é

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

V (vértice)

03. (UFJF-MG) Na divisão de um polinômio $P(x)$ pelo binômio $x + a$ o resto da divisão do polinômio produto $p_1(x) \cdot p_2(x)$ por

$(x + a)$ usou-se o Dispositivo prático de Briot-Ruffini e $x - 2$ é

encontrou-se: A) 3 B) 5 C) 8 D) 15 E) 21

-2 1 p 4 -5 -3 **05.** (PUCPR) Se o polinômio $x^4 + px^2 + q$ é divisível pelo

$q - 4$ polinômio $x^2 - 6x + 5$, então $p + q$ vale 5 r 7

A) -1 B) 3 C) 5 D) -4 E) 10

Os valores de r , q , p e a são, respectivamente,

A) 6 , 1 , -6 , -2 D) -6 , -2 , 1 , 2 **06.** (PUC RS) A divisão do polinômio $p(x) = x^5 - 2x^4 - x + m$

B) -6, -2, -2, 2 E) 4, 1, -4, 2 por $q(x) = x - 1$ é exata. O valor de m é

C) -6, 1, -2, 2 A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Editora Bernoulli 57

Frente E Módulo 18

07. (Mackenzie-SP) Observando a divisão dada, de **02.** Uma importante área da Matemática é a chamada Pesquisa

polinômios, podemos afirmar que o resto da divisão de Operacional (PO). Trata-se de um conjunto de técnicas de

$P(x)$ por $x + 1$ é

modelagem matemática aplicado a diversos problemas

$P(x) = x^2 - x - 2$ práticos. Atualmente, a Pesquisa Operacional é bastante

$2x - 1$ $Q(x)$ utilizada para a maximização do lucro de empresas.

A) Considere que um profissional da área de Pesquisa -1 B) -2 C) 2 D) 3 E) -3

08. (AFA-SP) O parâmetro a , de modo que o resto da divisão do lucro de uma empresa. Na sua pesquisa, ele descobriu de 5x Operacional tenha efetuado a modelagem da maximização

$3x^2 + (2a - 3)x + ax - 2$ por $x + 2$ seja 6, é igual a

que havia dois valores correspondentes à produção x para

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12

os quais o lucro seria nulo. O menor desses valores não é

09. (UFLA-MG-2009) O polinômio $x^3 + ax^2 + x + b$ é divisível suficiente para atingir uma região de lucratividade, pois o

por $x^2 + 2x - 3$. Então, o valor de $a - b$ é valor adquirido com a venda do produto é o mesmo gasto

A) 2 B) -10 C) 10 D) -2

para produzi-lo, e o maior desses valores eleva muito o

10. (UFJF-MG) O resto da divisão do polinômio custo da produção, devido à necessidade de aquisição de

$p(x) = 3x^2 - 17x + 27$ por $q(x) = x - 4$ é equipamentos, e também não gera lucro. Após analisar

A) 4 B) 7 C) $2x$ D) 5 E) $5x - 20$ os dados, ele obteve uma expressão que descreve o lucro

11. (ITA-SP) A divisão de um polinômio $P(x)$ por $x^2 L(x)$ dessa empresa em função do número de toneladas - x resulta

no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto $-7x$. O resto da divisão produzidas x . A expressão é a seguinte:

de $P(x)$ por $2x + 1$ é igual a

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) $5x^2 - x + 8x - 19x + 12$

$L(x) =$

12. $x - 1$ (UFJF-MG) Um polinômio $p(x)$ dividido por $x - 1$ deixa

resto 2. O quociente desta divisão é, então, dividido por Diante disso, o número de toneladas a serem produzidas, $x - 4$, obtendo resto 1. O resto da divisão de $p(x)$ por a fim de que a empresa tenha a máxima lucratividade, $(x - 1)(x - 4)$ é

A) é igual a 1 B) 2 C) $x + 1$ D) $x - 1$

13. (UFMG) O polinômio $P(x) = x^4 A) 3 B) 3,5 C) 4 D) 4,5 E) 5 + mx^2 + n$ é divisível por

$x^2 - 4$ e também por $x^2 - 3$. O valor do produto mn é

A) -84 B) -12 C) -1 D) 12 E) 14

GABARITO 14. (UFMG) O polinômio $P(x) = 3x^5 - 3x^4 - 2x^3 + mx^2$ é

divisível por $Q(x) = 3x^2 - 2x$. O valor de m é **Fixação**

3 16

A) -2 B) - C) D) 2 E) 4

8 9 01. B

SEÇÃO ENEM 02. B

03.
C

01. 04. A Um pesquisador estudou a variação entre duas grandezas E e T . Os resultados da sua pesquisa encontram-se no 05. A gráfico a seguir:

E Propostos

01. A 08. B 02. C 09. C

O 03. A 10. B

T

04. E 11. E 05. A 12. C

Sabe-se que $E(T)$ é uma função polinomial de T . Portanto, 06. E 13.

A

é possível afirmar que

07. E 14. C

A) $E(T)$ é um polinômio do 3º grau.

B) $E(T)$ é uma função periódica. **Seção Enem**

C) $E(T)$ possui grau maior ou igual a 3.

D) $E(T)$ é uma função injetora. 01. C 02. B

E) $E(T)$ é uma função par.

58 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Equações polinomiais I 19 E

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS 2º) Resolver,
em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 + x + 2 = 0$.

Resolu

Chamamos de equação algébrica ou equação
polinomial

a toda equação na variável x que pode ser escrita na
forma $\Delta = 1_2 - 4.1.2 = 1 - 8 = -7$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad n \geq 1$$

em que os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ são números complexos e $n \in \mathbb{N}$.

2.1.2

complexos e $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, no conjunto dos números complexos,

Exemplos

1º) $x^2 - 4x + 8 = 0$ $\{17i - + 17i\}$ o conjunto solução é dado por $S = \{-2 \pm 2i\}$
 2º) $5x^3 + 6x^2 - 3x + 1 = 0$ $\{17i - + 17i\}$ o conjunto solução é dado por $S = \{-2 \pm 2i\}$

RAÍZES OU ZEROS DE UMA EQUAÇÃO POLINOMIAL DA

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Dizemos que um número complexo a é raiz de uma equação

polinomial do tipo $P(x) = 0$ se, e somente se, $P(a) = 0$

0. Toda equação de grau n , $n \geq 1$, possui pelo menos uma raiz complexa. Por exemplo, a equação $2x^3 - x^2 + 4x - 5 = 0$ admite 1 como raiz, pois $2 \cdot 1^3 - 1^2 + 4 \cdot 1 - 5 = 2 - 1 + 4 - 5 = 0$.

Portanto, para verificarmos se um determinado número

complexo é raiz de uma equação, devemos substituir a x por esse número e verificar se a igualdade é satisfeita. Esse teorema foi enunciado no final do século XVIII pelo matemático Carl Friedrich Gauss. Uma das consequências

mais importantes desse teorema é a seguinte:

CONJUNTO SOLUÇÃO



OU VERDADE Um polinômio de grau n , $n \geq 1$, possui n raízes complexas.

complexas

Chamamos de conjunto solução de uma equação $P(x) = 0$, em um determinado conjunto universo U ,

ao

De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, conjunto formado por todas as raízes dessa equação. Resolver

podemos afirmar que existe pelo menos uma raiz complexa.

uma equação significa determinar o seu conjunto solução.

Sendo k essa raiz, temos $P(k) = 0$.

Exemplos

1º) Logo, o polinômio $P(x)$ é divisível pelo polinômio $x - k_1$. Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $x^2 + x + 2 = 0$. □ (Teorema de D'Alembert).

Resolução: Portanto, podemos escrever o seguinte: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7$

No conjunto $P_x(\mathbb{C})$, a equação não apresenta soluções, $\square_1 \Rightarrow P_x(\mathbb{C}) \cap \{x - k\} = \emptyset$. □ $0 \in \mathbb{Q}$ ou seja, $S = \emptyset$.

Editora Bernoulli 59

Frente E Módulo 19

Observe que, para $P(x) = 0$, temos que $x - k = 0$ ou

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

$Q(x) = 0$. Portanto, podemos concluir que as raízes de $Q(x)$

também são raízes de $P(x)$. **01.** Resolver a equação $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0$.

Podemos proceder de maneira análoga ao analisarmos

o polinômio Q *Resolução:* (x) .

Fatorando a equação, temos:

Sendo k uma raiz de $Q(x)$, podemos escrever: $x^2(x - 3) + 4(x - 3) = 0 \Rightarrow (x - 3)(x^2 + 4) = 0$

$Q(x) = (x - k) \cdot Q_1(x)$ Assim, temos:

Substituindo na expressão para $P(x)$, obtemos: $(x - 3) = 0 \mid x = 3 \mid x = 3 \mid \mid$ ou $\Leftrightarrow$

$P(x) = (x - k \mid \mid \mid) \cdot (x - k) \cdot Q_1(x)$ $x^2 + 4 = 0 \mid x^2 = -4 \mid x = \pm 2i \mid \mid \mid$ ou $\Leftrightarrow \mid \mid \mid$

Portanto, o conjunto solução é dado por $S = \{-2i, 2i, 3\}$.

Aplicando sucessivamente esse raciocínio, obtemos:

$P(x) = (x - k) \cdot (x - k) \cdot (x - k) \cdot \dots \cdot (x - k) \cdot Q_n(x)$ **02.**

Determinar a multiplicidade de cada uma das raízes na

equação $(x - 5)^3(x + 2)(x - 7)^4 = 0$.

Em que $Q(x)$ é um polinômio de grau zero. Observe

que o coeficiente de x em $P(x)$ é a . Logo, temos

Resolução: $Q(x) = a$. Observe que existem 3 fatores que possuem raiz igual a 5.

Portanto, a multiplicidade da raiz 5 é igual a 3.

Portanto:

Existe um único fator que possui raiz -2 . Logo, a raiz -2 possui multiplicidade igual a 1 (raiz simples).

$P(x) = (x - k_1)^{a_1} (x - k_2)^{a_2} \dots (x - k_n)^{a_n}$. Existem 4 fatores que possuem 7 como raiz. Logo,

a multiplicidade da raiz 7 é igual a 4.

Essa é a chamada forma fatorada do polinômio $P(x)$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO 01.

(UFJF-MG) Marque a alternativa **CORRETA**. A) Se a e b são raízes da equação algébrica $p(x) = 0$,

então o grau de $p(x)$ é exatamente 2.

Como consequência do exposto, enunciamos a seguir

chamado Teorema da Decomposição. B) Toda equação algébrica de grau $n \geq 1$ com coeficientes

reais admite n raízes reais.

Um polinômio $P(x)$ de grau n , $n \geq 1$, pode ser decomposto C) Se a , b e d são três raízes da equação algébrica

em n fatores do 1º grau, ou seja, pode ser escrito na forma: $p(x) = 0$ de grau n , então $n > 2$.

D) Se $p(x) = 0$ é uma equação algébrica de grau 3 cujas raízes são a , b e d , então $p(x) = (x - a)(x - b)(x - d)$.

$P(x) = (x - k_1).(x - k_2).(x - k_3). \dots .(x - k_n).a_n$ **02.**
(UFOP-MG) Considere a equação $7x(x - 1)(2x - 2) = 0$.

Então, podemos afirmar que

A) 1 é raiz tripla. D) -1 é raiz dupla.

Observe que uma consequência imediata desse teorema

é que toda equação de grau n , $n \geq 1$, possui n raízes complexas, distintas ou não. C) 1 é raiz simples.

OBSERVAÇÃO 03. (UFOP-MG) Se $p(x) = x^2(x^2 + 1)(x - 1)^2$, então a equação

$p(x)$
=

Consideremos o polinômio $P(x)$ de grau n , $n \geq 1$.
Sabemos

A) 8 raízes reais simples.

que esse polinômio pode ser decomposto em n fatores do

1º grau. Suponhamos que um mesmo número seja raiz de B) 6 raízes reais simples. k fatores de $P(x)$, $k \leq n$. Dizemos que esse número é uma raiz de multiplicidade k do polinômio $P(x)$. D) 2 raízes reais duplas.

60 Coleção Estudo

Equações polinomiais I

04. (FUVEST-SP) Sabendo-se que $p(x)$ é um polinômio, a é **05.** (PUC Minas) A equação de terceiro grau cujas raízes são

uma constante real e $p(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, 2 e 3 é $\cos x + 2x + 2 + x^2$ A) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

é uma identidade em x , **DETERMINE** B) $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$

A) o valor da constante a . **JUSTIFIQUE** sua resposta. C) $x^3 + x^2 + 3x - 5 = 0$

B) as raízes da equação $p(x) = 0$. D) $x^3 + x^2 + 2x + 3 = 0$

05. (Unicamp-SP) Seja $p(x) = x^3 + 6x^2 - 11x + 5 = 0 - 12x + 16$.

A) **VERIFIQUE** que $x = 2$ é raiz de $p(x)$.

06. (UFRN) Uma das soluções da equação $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ é

B) **USE** fatoração para mostrar que se $x > 0$ e $x \neq 2$,

então $p(x) > 0$. A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 07. (Cesgranrio)

Sejam **a** e **b**, respectivamente, a maior e

a menor das raízes de $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$. A diferença $a - b$ vale

01. (FUVEST-SP) O número de pontos de interseção dos A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

gráficos das funções reais $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 + 2$ é **08.** (UFRN) Seja $P(x) = x^3 + 6x^2 + 3 - x - 30$. Se $P(2) = 0$, então

A) 0 D) 3 o conjunto solução de $P(x) = 0$ é

B) 1 E) 4 A) $\{-2, -3, -5\}$

C) 2 B) $\{2, -3, -5\}$

C) $\{2, -2, -2\}$

02. (PUC Minas) Sendo $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ e D) $\{2, 3, 5\}$

$q(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$, nota-se que $p(1) = q(1) = 0$. E) $\{2, 6, 30\}$

p x () **MATEMÁTICA**

A forma mais simples da fração é

q x () **09.** (UFRGS) A raiz da equação $(1 - {}^1_2)x^3 - 1 - {}^1_2 = 0$ é

A) $x + 1$ x -1 D) A) $1 - {}^1_2$ x $- 2$ x $+ 2$ 1_2 B) $1 +$

B) x $- 2$ x $+ 1$ E) C) $(1 + {}^1_2)_6$ x $+ 1$ x $+ 2$

C) x D) $(3 - 1 + 2) - 1$ ₂

x $- 2$ E) $- 2$ $1 - {}_3$ ()

03. (UCS-RS) Sabe-se que o polinômio $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9x$ x^2

10. é divisível por $g(x) = x^2$ (Cesgranrio) A soma das raízes da equação = vale $- 2x + 3$. Se $q(x)$ é o quociente 5 105

da divisão de $f(x)$ por $g(x)$, quais são as raízes de $q(x)$? A) 5 B) 10 C) 15 D) 18 E) 21

A) 1 e -1

B) 3 e -3 **11.** (Cesgranrio) O produto das raízes da equação

C) 1 e -3 ₂ $(9x - 1)(25x - 1) = 0$ vale

D) -1 e 3

1

E) -1 e -3 34 A) $-$

04. 1 (PUC-SP) O número de raízes reais do polinômio B) $- 625$

$p(x) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$ é

A) C) - 1

0 225

B) 1

C) 2 D) 1

625

D) 3 1 E) E) 4 225

Editora Bernoulli **61**

Frente E Módulo 19

12. (UFPR) Dadas as equações $x^2 + x + 1 = 0$ e $x^3 - 1 = 0$,

SEÇÃO ENEM

podemos afirmar que

A) apenas uma das raízes de $x^2 + x + 1 = 0$ satisfaz $x^3 - 1 = 0$.
01. Um professor de Matemática propôs à turma a seguinte equação $x^2 + x + 1 = 0$ e afirmou que

nenhuma das raízes de $x^2 + x + 1 = 0$ satisfaz $x^3 - 1 = 0$.

B) a soma das raízes de $x^2 + x + 1 = 0$ satisfaz $x^3 - 1 = 0$.
Resolver a equação $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Diante da dificuldade da turma, o professor forneceu

C) as raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$ satisfazem uma dica:

$x^3 - 1 = 0$.

“Sabe-se que $x = 1$ é solução dessa equação.”

D) as raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$ não satisfazem

Com base nessas afirmações, é possível afirmar que

$$x^3 - 1 = 0.$$

A) a soma das raízes da equação é igual a 3.

E) as raízes da equação $x^3 - 1 = 0$ estão em progressão B) a equação admite apenas uma raiz real.

aritmética.

C) a equação admite uma raiz dupla.

D) o produto das raízes da equação é igual a 2.

13. (FCMSC-SP) Os valores reais de p e q para os quais a E) as outras duas raízes são irracionais.

equação $x^3 - 2x + px + q = 0$ admite uma raiz de
3 02. Uma viga possui o formato de um prisma quadrangular

multiplicidade 3 são, respectivamente,

regular. Sabe-se que essa viga é maciça e que suas

A) dimensões, em metros, são também soluções da equação 3 e 4

$$\text{polinomial } x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x = 0.$$

4

B) e -8 Portanto, pode-se afirmar que o volume dessa viga, 3^3 em m ,
é igual a

C) 4 e – A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16 3 8

D) – e 4

3

E) N.d.a. **GABARITO**

14. (PUC-SP) Em relação ao polinômio $p(x) = (x - 1)^2(x^2 - 1)$,

Fixação

o que se pode afirmar sobre o número 1?

01.

C

A) É raiz simples. 02. A

B) É raiz dupla. 03. D

C) É raiz tripla. 04. A) $a = 0$

B) $S = \{0, 1, 2\}$

D) É raiz quádrupla.

05. A) Verifique que $P(2) = 0$

E) Não é raiz. B) Demonstração

15. (UFV-MG–2009) Considere os conjuntos numéricos:

Propostos

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \text{ e } 2 - x \leq 2x\}$ e 01. A 06. B 11. C

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0\}$ 02. C 07. A 12. C

O número total de subconjuntos do conjunto interseção 03. D 08. B

13. C

A 04. C 09. D 14. $C \cap B$ é

05. A 10. E 15. B

A) 8

B) 4 **Seção Enem**

C) 2 01. C 02. B

D) 1

62 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Equações polinomiais II 20 E

RELAÇÕES DE GIRARD **Exemplos**

1º) Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 - x + 4 = 0$._{1 2}

São as relações estabelecidas entre as raízes e os
Calcular

coeficientes da equação algébrica $P(x) = 0$. Vamos
estudá-las

caso a caso. A) $x_1 + x_2$

1 caso: Equação do 2º grau

◦ **Resolução:**

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a \neq 0. \text{ Sejam } x_1 \text{ e } x_2 \text{ suas raízes.}$$

As relações entre essas raízes são as seguintes:

B)
x
.x
12



$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

2.º caso: Equação do 3º grau

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ com } a \neq 0. \text{ Sejam } x_1, x_2 \text{ e } x_3 \text{ suas raízes.}$$

As relações entre essas raízes são as seguintes:

Resolução:



$$x^2 + b_1 x + c_1 = 0 \quad x^2 + b_2 x + c_2 = 0 \quad x^2 + b_3 x + c_3 = 0 \quad x^2 + b_4 x + c_4 = 0 \quad x^2 + b_5 x + c_5 = 0$$

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) + (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3) = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = -a_1$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 = -a_2$$

Resolução:

Generalizando para uma equação do grau n , $n \geq 1$, temos: $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0$

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

Elevando ao quadrado os dois membros, temos: $(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0)^2 = 0$

Em que $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as suas raízes. $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) + (a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + \dots + a_1^2) = 0$

As relações de Girard são: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = -a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}$



$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ 2º) Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ as raízes da equação:

Calcular a_{n-3}

Resolução:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 3$$

B) $x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x_{121323}$

PESQUISA DE

Resolução: RACIONAIS

$$xx. + xx.xx.1_1 c 2$$

$$21323 + = = =$$

a 2

Em determinadas situações, podemos pesquisar acerca da

C) $x^3 + x^2 + 23x + 24 = 0$, baseados na seguinte propriedade: existência de uma raiz racional de uma equação da forma **Resolução:**

$x^2 - dx + p = 0$ 1 1 . . Caso o número seja uma raiz racional irredutível da $x^2 - dx + p = 0$ a 2

equação algébrica $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ de

D) $1 \mid 1 \mid + +$ que $\mathbf{p}$ é divisor de a_0 , e $\mathbf{q}$ é divisor de a_n . x coeficientes inteiros, com $a \neq 0$ e $a \neq 0$, podemos afirmar n_0

1 X X 23

Exemplo

Resolução:

Resolver a equação $x^3 + 2x^2 - 5x + 2 = 0$.

$$x^3 + 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Efetuada a pesquisa de raízes racionais, temos: 2

i) p é um divisor de 2, ou seja, p pode ser igual a

$$E) \pm 1, \pm 2, -2, -1, 1 \text{ ou } 2.$$

ii) q é um divisor de 1, ou seja, q pode ser igual a

Resolução:

$$\begin{aligned} & -1 \\ & \text{ou} \\ & 1. \end{aligned}$$

$$x^3 + 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Portanto, a fração p pode assumir os seguintes valores:

Elevando os dois membros ao quadrado, temos: q

$$(-2, -1, 1 \text{ ou } 2)$$

$$x^3 + 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow$$

2

Entre esses valores, verificamos que 1 é raiz. Portanto,

$x^2 + 2x - 5x + 2$ é divisível pelo polinômio $x^2 + x + 2$.
 $\Rightarrow 9x - 1$.
 Ao efetuarmos a divisão desses polinômios pelo

Método de Briot-Ruffini (abaixamento do grau do polinômio),

$$x^2 + 2x - 5x + 2 \div x^2 + x + 2 = 9x - 1$$

encontraremos um polinômio
 quociente cujas raízes são

também raízes de $P(x)$. Portanto, temos o seguinte:

TEOREMA DAS RAÍZES

COMPLEXAS

O quociente é dado por $Q(x) = x^2 + 3x - 2$.

Se uma equação $P(x) = 0$, com coeficientes reais, Calculando as

raízes de $Q(x)$, temos:



possui uma raiz complexa $a + bi$ ($b \neq 0$), então $x^2 + 3x - 2 = 0$

o seu conjugado $a - bi$ também é raiz desse polinômio.

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 17$$

Observe algumas consequências imediatas desse teorema: $x^3 - 17 = - \pm$

2

i) As raízes complexas sempre aparecem aos pares. Portanto, o conjunto solução é dado por:

ii) Se o grau de um polinômio é ímpar, então esse $\{ x^3 - 17 \mid x^2 + 3x - 2 \mid S = \{ -2, -1 \} \}$ polinômio possui pelo menos uma raiz real. $2 \mid 2 \mid \}$

Equações polinomiais II

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO 02. (UFJF-MG)

Seja S a soma das raízes do polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$, em que a , b e c são números reais

01. Se $a \neq 0$. Se S é a soma das raízes de $p(x - 1)$, então a (Cesgranrio) Se a , b e c são as raízes da equação

$x^3 - 10x^2 - 2x + 20 = 0$, então o valor da expressão

A) -1 C) $1 + bc + ab + abc$ é igual a

A) 400 B) 0 D) 2

B) 200

03. (FUVEST-SP) Se a equação $8x^3 + kx^2 - 18x + 9 = 0$ tem

D) -200 raízes reais a e $-a$, então o valor de k é

02. E) -400 9 A) D) -2 4 (UFOP-MG) Sabendo que -1 é raiz da equação polinomial B) 2 E) -4 $6x^3 + 5x^2 + kx - 1 = 0$ e denominando de a e b as outras

raízes dessa equação, pode-se afirmar que $a^2 + b^2$ vale C) 8 1 A) -1 C) 6 **04.** (UFSCar-SP) Sabendo-se que a soma de duas das raízes

B) 13 da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ é igual a 5 , pode-se 1 D)

03. (U F O P - M G - 2 0 0 9) C o n s i d e r e o p o l i n ô m i o B) somente uma raiz é nula. A) são todas iguais e não nulas.

$p(x) = x^4 - 3x^2 - x - 14x + 2x + 24$. Sabendo-se que o

C) as raízes constituem uma progressão geométrica.

produto de duas raízes de $p(x)$ é -12 , o produto das

outras duas raízes é D) as raízes constituem uma progressão aritmética.

A) -2 E) nenhuma raiz é real.

B) 2

C) 4 **05.** (UFMG) A soma de todas as raízes da equação

D) $-4(x-1)^2 - (x-1)(x+4) = (x-1)(x+1)$ é

MATEMÁTICA

A) -5 B) -2 C) 2 D) 5 E) 6

04. (UFMG) Os números -1 e 1 são duas raízes do polinômio

$p(x) = cx^3 + ax^2 + bx + 2c$. A terceira raiz de $p(x)$

é **06.** (UFMG) Se a equação $x^2 + px + q = 0$ admite raízes reais

A) -3 simétricas, então

B) A) $p = 1$ e $q = 0$ -2

B) $p = 1$ e $q > 0$

C) 0

C) $p = 1$ e $q < 0$

D) $p = 0$ e $q > 0$

2

E) $p = 0$ e $q < 0$

E) 2

05. 07. (FUVEST-SP) Sabe-se que o produto de duas raízes da (Mackenzie-SP) Se a soma de duas raízes de

$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + k = 0$ é igual a 1. Então, k é igual a

A) -6 o valor de k é

B) -3 A) -8

C) -2 B) -4

D) 3 C) 0

E) 6 D) 4

EXERCÍCIOS PROPOSTOS E) 8

08. (UFRGS) Se os números -3 , a e b são raízes da equação

01. $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$, então o valor de $a + b$ é (FUVEST-SP)

Seja $p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um

polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as A) -6

quatro raízes de $p(x)$ são inteiras e que três delas são B) -2

pares e uma é ímpar. Quantos coeficientes pares tem o C) -1

polinômio $p(x)$? D) 2

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4 E) 6

Frente E Módulo 20

09. (Cesgranrio) Se as raízes da equação $x^2 + bx + 27 = 0$ são números primos fascinam os matemáticos há séculos.

são múltiplos positivos de 3, então o coeficiente **b** vale Diversas tentativas já foram feitas para se determinar

- A) 12 um polinômio gerador de números primos. Um desses
- B) -12 polinômios, conhecido como polinômio de Goetgheluck,
- C) 9 é dado por $P(x) = x^3 - 34x^2 + 381x - 1511$. Tal polinômio
- D) -9 gera números primos para valores inteiros de **x**, variando
- E) 6 de 0 até 25. Um dos números primos gerados é -1 163.

Sabendo-se que o polinômio admite não somente valores

10. (FUVEST-SP) As três raízes de $9x^3 - 31x^2 - 10 = 0$ são **p**, inteiros para **x**, pode-se afirmar que o produto de todos

q e 2. O valor de $p_2^2 + q$ é os valores de **x**, para os quais $P(x) = -1511$, é

- A) 5 A) 1 511 10 20 26 31 B) C) D) E) 9 9 9 9 B) -1 511 9

C)
381

11. (Cesgranrio) Se $x^3 - 2x^2 - 348x + 4 = 0$ tem uma raiz $x = 1$, então as outras raízes da equação são E) 348

- A) complexas não reais.

B) racionais. **GABARITO**

C) positivas.

D) negativas. **Fixação**

E) reais de sinais opostos.

01.
D

12. (UFU-MG–2009) Sabendo-se que os números reais não 02. D

nulos, a e $-a$, são soluções da equação $3x^3 - 2x^2 + px + 1 = 0$, 03.
A

então, pode-se afirmar que

04.
E

A) $p \geq 1$

B) $0 \leq p < 1$ 05. A

C) $-1 \leq p < 0$ **Propostos**

D) $p < -1$

01.
D

SEÇÃO ENEM 02. D

03.
E

01. 04. C O matemático Cardano, no século XVI, publicou o livro

Ars Magna, no qual apresentava uma fórmula para 05. A

resolver equações do tipo $x^3 + ax + b = 0$. 06. E

A fórmula era a seguinte: 07. A

$$x = \sqrt[3]{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} + \sqrt[3]{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$, \text{ sendo } E = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{ac}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{ac}{3}}}$$

$$08. B \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{ac}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{ac}{3}}}$$

Acerca da equação $x^3 + 63x - 316 = 0$, podemos 3 10. D

afirmar que 11. A

(Dado: $\sqrt[3]{34^2 225} = 185$) 12. D

A) possui uma raiz racional. **Seção Enem**

B) possui uma raiz irracional.

C) possui apenas raízes complexas. 01. A

D) não possui nenhuma raiz, real ou complexa. 02. E

E) possui três raízes idênticas.